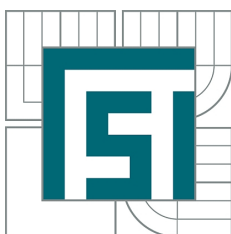


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MATEMATIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MATHEMATICS

## TVAROVÁ OPTIMALIZACE DIFUZORU VODNÍ TURBÍNY SHAPE OPTIMIZATION OF HYDRAULIC TURBINE DIFFUSER

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

JURAJ HLINÍK

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

doc. Ing. PAVEL RUDOLF, Ph.D.



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2014/2015

## **ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**

student(ka): Juraj Hliník

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### **Tvarová optimalizace difuzoru vodní turbíny**

v anglickém jazyce:

### **Shape optimization of hydraulic turbine diffuser**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Další zvyšování účinnosti nejenom hydraulických strojů si vyžaduje využití progresivních přístupů. Jedním z nich jsou optimalizační metody. Ve spojení s prostředky výpočtové mechaniky tekutin (CFD) je matematická optimalizace silným nástrojem pro hledání nových tvarů průtočných částí hydraulických strojů s cílem dosažení jejich lepších provozních parametrů (účinnost, kavitační vlastnosti, šířka provozního pásma, atd.).

Cíle bakalářské práce:

Cílem bakalářské práce je tvarová optimalizace koncového difuzoru vodní turbíny (tzv. sací trouby) pro dosažení maximální hodnoty koeficientu tlakové regenerace. Úloha bude uvažována jako rotačně symetrická, parametrizace povrchu difuzoru bude provedena Bezierovou křivkou. Cílová funkce bude vyhodnocována pomocí komerčního CFD softwaru ANSYS Fluent. Optimalizační strategie bude alternativně řízena metodami Nelder-Mead nebo BFGS, které budou v rámci bakalářské práce naprogramovány.

Seznam odborné literatury:

- [1] Rudolf, P.: Studie smykových vrstev k optimalizaci sací trouby vírové turbíny, dizertační práce, VUT, 2004.
- [2] Klapka, J, Dvořák, J., Popela, P.: Metody operačního výzkumu, VUTIUM, 2001
- [3] Machalová, J., Netuka, H.: Numerické metody nepodmíněné optimalizace, UPOL, 2013

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 21.11.2014

L.S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
Ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
Děkan fakulty

## **Abstrakt**

Cieľom tejto bakalárskej práce je prepojenie matematickej optimalizácie s výpočtovým softvérom za účelom aplikácie v tvarovej optimalizácii v mechanike tekutín. Úloha je implementovaná na problém tvarovej optimalizácie koncového difúzora vírovej turbíny a je stanovený predpoklad o jeho rotačnej symetrickosti. Proces optimalizácie je realizovaný pomocou algoritmov Nelder-Mead a BFGS, ktorému predchádza istý matematický základ k danej problematike. Snahou mojej bakalárskej práce bolo maximalizovanie koeficientu tlakovej regenerácie prostredníctvom vyššie spomenutých algoritmov, ktorých implementácia prebehla v softvéri Matlab.

## **Summary**

This bachelor thesis deals with mathematical optimization focusing on the shape optimization in fluid mechanics with help of a CFD software. More specifically, it comprises the shape optimization of a swirl turbine draft tube with a specified rotational symmetry and the whole process is realised with Nelder-Mead and BFGS algorithms. The main object was to maximize the pressure coefficient, with help of the algorithms which were implemented in Matlab software.

## **Klíčové slova**

Nelder-Mead, BFGS, optimalizácia

## **Keywords**

Nelder-Mead, BFGS, optimization

HLINÍK, J. *Tvarová optimalizace difuzoru vodní turbíny*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 55 s. Vedoucí doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.



Prehlasujem, že som predloženú bakalársku prácu spracoval samostatne s použitím odbornej literatúry a dostupných prameňov uvedených v zozname použitej literatúry.

Juraj Hliník





Chcel by som sa poďakovať vedúcemu mojej bakalárskej práce, doc. Ing. Pavlu Rudolfovi, Ph.D. za jeho odborné vedenie, konzultácie a cenné rady, ktoré mi poskytoval pri jej vypracovávaní.

Rád by som sa poďakoval aj svojim rodičom za zázemie a podporu, ktorá mi bola pri doterajšom štúdiu poskytovaná.

Juraj Hliník



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Prípravná kapitola</b>	<b>14</b>
2.1	Minimum funkcie . . . . .	14
2.2	Gradient a hessián . . . . .	14
2.3	Definitnosť a semidefinitnosť matice . . . . .	15
2.4	Stacionárny bod . . . . .	15
2.5	Konvexnosť . . . . .	15
2.6	Spádový smer . . . . .	16
2.7	Rychlosť konverencie . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Vodné turbíny</b>	<b>17</b>
3.1	Základné charakteristiky vodných turbín . . . . .	17
3.2	Vírová turbína . . . . .	17
3.2.1	Koncový difúzor vodnej turbíny . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Matematická optimalizácia</b>	<b>22</b>
4.1	Formulácia problému matematickej optimalizácie . . . . .	22
4.2	Podmienky optimality . . . . .	23
4.3	Klasifikovanie optimalizačných metód . . . . .	23
4.4	Testovanie optimalizačných algoritmov . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Priame metódy</b>	<b>25</b>
5.1	Simplexové metódy . . . . .	25
5.2	Nelder-Mead . . . . .	26
5.2.1	Voľba počiatočného simplexu a parametrov . . . . .	26
5.2.2	Algoritmus metódy Nelder-Mead . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Newtonová metóda a jej modifikácie</b>	<b>31</b>
6.1	Newtonova metóda . . . . .	31
6.2	Kvázinewtonovské metódy . . . . .	32
6.2.1	Myšlienka kvázinewtonovských metód . . . . .	32
6.3	BFGS . . . . .	33
6.3.1	Armijové spätné vyhľadávanie . . . . .	34
<b>7</b>	<b>Tvarová optimalizácia v mechanike tekutín</b>	<b>35</b>
7.1	Parametrizácia geometrie . . . . .	36
<b>8</b>	<b>Aplikácia metód Nelder-Mead a BFGS pri tvarovej optimalizácii</b>	<b>38</b>
8.1	Modifikácia algoritmu BFGS . . . . .	38
8.2	Príprava na proces optimalizácie . . . . .	38
8.3	Tvarová optimalizácia po častiach lineárneho difúzoru . . . . .	42
8.3.1	Nelder-Mead . . . . .	42
8.3.2	BFGS-M . . . . .	42
8.3.3	Zhrnutie . . . . .	43

8.4	Tvarová optimalizácia s využitím Bézierových kriviek 1. stupňa . . . . .	45
8.4.1	Nelder-Mead . . . . .	45
8.4.2	BFGS . . . . .	45
8.4.3	Zhrnutie . . . . .	45
8.5	Tvarová optimalizácia s využitím kubických Bézierových kriviek . . . . .	46
8.5.1	Nelder-Mead . . . . .	46
8.5.2	BFGS-M . . . . .	47
8.6	Tvarová optimalizácia s využitím Bézierových kriviek 3. stupňa . . . . .	47
<b>9</b>	<b>Záver</b>	<b>49</b>
	<b>Zoznam použitých skratiek a symbolov</b>	<b>52</b>
	<b>Seznam příloh</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Zdrojový kód v Matlabe</b>	<b>54</b>
<b>B</b>	<b>Journaly z Fluentu a Gambitu</b>	<b>55</b>

# 1. Úvod

Prúdením kvapaliny potrubiami dochádza ku vzniku hydraulických strát. Takéto deje považujeme za nežiadúce a preto je vytváraná snaha o ich minimalizovanie. Pod pojmom minimalizácia rozumieme proces hľadania minima skúmaných funkcií.

Prioritnou metódou minimalizovania nepriaznivých hodnôt v mechanike tekutín sa vďaka zvyšovaniu kapacity a rýchlosti výpočetnej techniky stalo prepojenie matematickej optimalizácie s komerčnými výpočtovými softvérmi. Hlavnou výhodou tohto zlúčenia je schopnosť pracovať automaticky bez zásahu užívateľa prostredníctvom istej, dopredu prichystanej postupnosti krokov nazývanej algoritmus.

Táto práca je rozdelená do niekoľkých tematických kapitol. Po úvode nasleduje druhá kapitola, v ktorej zdefinujeme matematické pojmy potrebné k plnému porozumeniu nasledujúceho textu.

Nasledujúca tretia kapitola je venovaná základnemu uvedeniu do problému. Venuje sa krátkemu opisu vírovej turbíny, sacieho potrubia a jeho hlavným výhodám.

Štvrtá kapitola je zameraná na definíciu základných pojmov v problematike matematickej optimalizácie, časť sa zaoberá podmienkami optimality a zvyšok klasifikácii a testovaniu optimalizačných metód.

Ďalšia kapitola sa venuje najmä metóde Nelder-Mead, kde je snaha o názorne ukázanie myšlienky metódy a jej pseudokód.

V úvode šiestej kapitoly je opísaná Newtonova metóda a kvázinewtonovské metódy. Medzi kvázinewtonovské metódy sa radí metóda BFGS, ktorej sa venuje zvyšná časť kapitoly.

Zvyšné kapitoly predstavujú úvod do tvarovej optimalizácie a aplikáciu spísaných poznatkov do reálneho problému a ich vyhodnotenie. Dochádza k porovnaniu metód a ku grafickému znázorneniu novej optimalizovanej geometrie.

## 2. Prípravná kapitola

Cieľom tejto kapitoly je nevyhnutné zavedenie definícií a viet, ktoré sú potrebné na porozumenie ďalších kapitol tejto práce. Nasledujúce pojmy pochádzajú z literatúry [1].

### 2.1. Minimum funkcie

**Definícia 2.1.1.** *Nech  $f(\mathbf{x})$  je daná funkcia. Bod  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  sa nazýva bodom lokálneho minima funkcie  $f$ , ak existuje  $\varepsilon > 0$  také, že*

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \varepsilon),$$

*kde  $B(\mathbf{x}^*, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}\| < \varepsilon\}$ , pričom  $\|\cdot\|$  značí euklidovskú normu vektoru v  $\mathbb{R}^n$ . Ak platí*

$$f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \varepsilon), \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*,$$

*hovoríme o ostrom lokálnom extréme.*

**Definícia 2.1.2.** *Nech  $f(\mathbf{x})$  je daná funkcia. Bod  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  sa nazýva bodom globálneho minima funkcie  $f$ , ak platí*

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

*Ak navyše platí*

$$f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*,$$

*hovoríme o ostrom globálnom minime.*

### 2.2. Gradient a hessián

**Definícia 2.2.1.** *Nech  $f \in C^1$ . Gradientom funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  rozumieme vektor*

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

**Definícia 2.2.2.** *Nech  $f \in C^2$ . Hessiánom funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  rozumieme symetrickú maticu*

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = (h_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^n \quad h_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

### 2.3. Definitnosť a semidefinitnosť matice

**Definícia 2.3.1.** *Reálna symetrická matica  $\mathbf{A}$  sa nazýva pozitívne definitná, ak pre ľubovoľný komplexný resp. reálny  $n$ -rozmerný vektor  $\mathbf{x}$  platí:*

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

**Definícia 2.3.2.** *Reálna symetrická matica  $\mathbf{A}$  sa nazýva pozitívne semidefinitná, ak pre ľubovoľný komplexný resp. reálny  $n$ -rozmerný vektor  $\mathbf{x}$  platí:*

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Definícia definitnosti a semidefinitnosti matice je čerpaná zo zdroja [2] .

### 2.4. Stacionárny bod

**Definícia 2.4.1.** *Nech  $f \in C^1$ . Bod  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  je stacionárnym bodom funkcie  $f$ , ak platí*

$$\nabla f(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

.

### 2.5. Konvexnosť

**Definícia 2.5.1.** *Množina  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  sa nazýva konvexná, ak pre každé dva body  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$  platí*

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in M \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

## 2.6. SPÁDOVÝ SMER

**Definícia 2.5.2.** Funkcia  $f(\mathbf{x})$  sa nazýva konvexná na  $M$ , ak

1.  $M$  je konvexná
2. pre ľubovoľné  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$  platí

$$f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y}) \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Ak platí navyše ostrá nerovnosť pre  $\forall \lambda \in (0, 1)$  a  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , potom hovoríme o rýdzo konvexnej funkcii na  $M$

**Veta 2.5.1.** Nech  $f \in C^2$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  je konvexná množina s neprázdny vnútrom. Funkcia  $f$  je konvexná na  $M$  vtedy a len vtedy, keď je jej hessián pozitívne semidefinitný na  $M$ . Funkcia  $f$  je rýdzo konvexná na  $M$  vtedy a len vtedy, keď je jej hessián pozitívne definitný na  $M$ .

## 2.6. Spádový smer

**Definícia 2.6.1.** Nech  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je daná funkcia,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  daný bod a  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  daný smer. Ak existuje  $\alpha_0 > 0$  také, že

$$f(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{p}) < f(\mathbf{x})$$

potom  $\mathbf{p}$  nazývame spádovým smerom funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{x}$ .

**Veta 2.6.1.** Nech  $f \in C^1$  je daná funkcia,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  daný smer a nech  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  značí gradient funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{x}$ . Ak platí

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{p} < 0,$$

potom  $\mathbf{p}$  je spádovým smerom funkcie  $f$  v bode  $\mathbf{x}$ .

## 2.7. Rýchlosť konvergenzie

**Definícia 2.7.1.** Nech postupnosť  $\{\mathbf{x}_k\}$  konverguje k bodu  $\mathbf{x}^*$ . Pre rýchlosť konvergenzie platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^p} = c$$

kde  $0 < c < \infty$  nazývame chybovou konštantou. Pre  $p = 1$  a  $c < 1$  je konvergenzia lineárna, pre  $p = 2$  kvadratická a pre  $p = 3$  hovoríme o kubickej rýchlosti konvergenzie. V prípadoch ak  $p = 1$ ,  $C = 0$  alebo  $1 < p < 2$ ,  $C > 0$  sa jedná o superlineárnu konvergenziu.



## 3. Vodné turbíny

### 3.1. Základné charakteristiky vodných turbín

Vodná turbína je zariadenie slúžiace na premenu vodnej energie na energiu mechanickú [3]. Ich značné využitie je v energetickom priemysle, kde sa využívajú na pohon generátorov. Generátor je zariadenie prostredníctvom ktorého dochádza k premene mechanickej energie na elektrickú.

Dôležitými časťami turbín sú rozvádzacie a obežné koleso. Rozvádzacie koleso je nepohyblivé a slúži k privádzaniu vody na lopatky obežného kolesa v optimálnom smere. Hriadeľ obežného kolesa následne poháňa generátor, resp. iný pracovný mechanizmus.

V prípade, ak je hodnota tlaku pri vstupe aj výstupe z obežného kolesa rovnaká, hovoríme o turbínach *rovnotlakých* (Peltonova, Bánkiho turbína). O *pretlakových* turbínach hovoríme vtedy, ak hodnota tlaku na vstupe do obežného kolesa je väčšia ako na výstupe z neho (Francisova, Kaplanova, vírová turbína). [3]

### 3.2. Vírová turbína

Vo svete existuje mnoho vodných tokov, u ktorých nedochádza k využívaniu energie vody. Dôvodom je najmä vysoká cena konštrukcie samotnej vodnej turbíny i celkovej stavby vodného diela. Výslednú cenu pri realizovaní návrhu vodnej elektrárne je možné znížiť využitím vodnej turbíny, ktorá navyše odstraňuje nevýhody dvoch najvyužívanejších turbín - Kaplanovej a Bánkiho. [4]

Oproti Kaplanovej turbíne má vírová turbína jednoduchšiu konštrukciu a v porovnaní s Bánkiho turbínou má vyššiu účinnosť pri malých spádoch. Keďže vírová turbína sa radí medzi turbíny pretlakové, jej dôležitou súčasťou je okrem iného aj koncový difúzor. [4]

#### 3.2.1. Koncový difúzor vodnej turbíny

Difúzor je typ potrubného kanála, u ktorého dochádza k spojitému zväčšeniu prietokového profilu<sup>1</sup> v smere prúdenia kvapaliny. Pri prietoku kvapaliny difúzorom dochádza k premene kinetickej energie na tlakovú, čo vychádza priamo z Bernoulliho rovnice.[5]

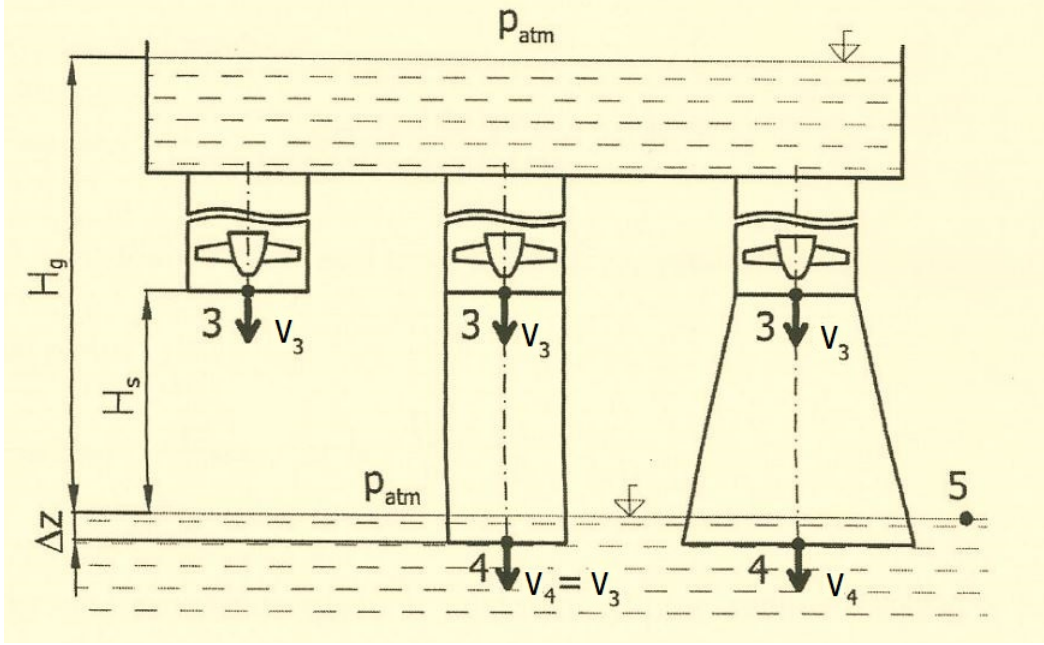
Koncový difúzor vodnej turbíny, nazývaný aj sacia trúba, zabezpečuje spojenie medzi výtokom vodnej turbíny a dolnou nádržou. Hlavnou funkciou sacej trúby je spracovanie nevyužitej kinetickej energie vody, s ktorou voda opúšťa obežné koleso a využitie celého spádu medzi výtokom turbíny a dolnou nádržou, čím sa zvýši účinnosť celej turbíny.[6][7]

<sup>1</sup>prietokový profil predstavuje obsah rezu kolmého na osu trubice v danom mieste

### 3.2. VÍROVÁ TURBÍNA

#### Mechanizmus využitia celého spádu [6]

Schopnosť sacej trúby využiť celý spád robí z neho nevyhnutnú súčasť pretlakových turbín. Mechanizmus využitia spádu nie je na prvý pohľad moc intuitívny, avšak relatívne jednoduchý, využívajúci len základne vzťahy hydromechaniky, a preto je vhodné sa tejto schopnosti sacej trúby v skratke venovať.



Obrázok 3.1: Význam sacej trúby[6]

Množstvo mernej kinetickej energie v mieste výstupu z obežného kola je určené vzťahom

$$E_{k2} = \alpha_2 \frac{v_2^2}{2},$$

kde  $\alpha_2$  predstavuje Coriolisove číslo<sup>2</sup> a  $v_2$  je absolútna rýchlosť pri výstupe z obežného kola. Časť tejto energie, ktorá by inak ostala nevyužitá, je možné spracovať práve v sacej trúbe. K vyjadreniu množstva energetickej premeny v sacej trúbe je potrebné využiť zákon zachovania energie<sup>3</sup> medzi bodmi 3 a 4

$$\frac{p_3}{\rho} + \alpha_3 \frac{v_3^2}{2} + gH_s = \frac{p_4}{\rho} + \alpha_4 \frac{v_4^2}{2} - g\Delta z + Y_{Z3,4} \quad (3.2)$$

a zároveň medzi bodmi 4 a 5

$$\frac{p_4}{\rho} + \alpha_4 \frac{v_4^2}{2} = \frac{p_{atm}}{\rho} + g\Delta z + Y_{Z4,5}. \quad (3.3)$$

<sup>2</sup>Coriolisove číslo závisí na tvare prietokového prierezu a tvare rýchlostného profilu a nadobúda hodnoty väčšie ako jedna. Pod pojmom rýchlostný profil je myslená okamžitá rýchlosť tekutiny v každom bode prietokového profilu

<sup>3</sup>zákon zachovania energie alebo Bernoulliho rovnicu je možné vyjadriť v základom tvare

$$\frac{p_0}{\rho} + \alpha_0 \frac{v_0^2}{2} + gh_0 = \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2} + gh_1 + Y_{Z1,2}, \quad (3.1)$$

kde prvý člen predstavuje mernú tlakovú energiu, druhý člen reprezentuje mernú kinetickú energiu a tretí mernú potenciálnu energiu. Člen  $Y_{Z1,2}$  na pravej strane vyjadruje mernú stratovú energiu.

Jednotlivé členy týchto dvoch rovníc predstavujú:

$p$  statický tlak  
 $\rho$  hustota prúdiacej kvapaliny  
 $\alpha$  Coriolisove číslo  
 $v$  absolútna rýchlosť  
 $g$  gravitačné zrýchlenie  
 $H_s$  je sacia výška  
 $\Delta z$  je hĺbka ponorenia sacej trúby  
 $Y_Z$  merná stratová energia a platí

$$Y_{Z4,5} \cong \alpha_4 \frac{v_4^2}{2}. \quad (3.4)$$

V rovnici (3.3) sa nevyskytuje člen mernej potenciálnej energie na ľavej strane, keďže ako nulovú hladinu potenciálnej energie uvažujeme hladinu spodnej nádrže. Na pravej strane je nulový člen mernej kinetickej energie z dôvodu predpokladu o rozľahlej spodnej nádrži a dôsledkom toho nulová veľkosť strednej rýchlosti.

Rozdiel energií medzi bodmi 3 a 5 je znázornený v nasledujúcom vzorci.

$$\Delta Y = Y_3 - Y_5 = \frac{p_3}{\rho} + \alpha_3 \frac{v_3^2}{2} + gH_s - \frac{p_{atm}}{\rho} = \frac{p_3 - p_{atm}}{\rho} + \alpha_3 \frac{v_3^2}{2} + gH_s \quad (3.5)$$

V prípade bez sacej trúby, kedy  $p_3 = p_{atm}$  platí

$$\Delta Y_{-SP} = \alpha_3 \frac{v_3^2}{2} + gH_s \quad (3.6)$$

Dosadením rovníc (3.3) a (3.4) do (3.2) dostávame

$$\frac{p_3}{\rho} + \alpha_3 \frac{v_3^2}{2} + gH_s = \frac{p_{atm}}{\rho} + \alpha_4 \frac{v_4^2}{2} + Y_{Z3,4}. \quad (3.7)$$

Úpravou dosiahneme tvar

$$\frac{p_3 - p_{atm}}{\rho} + \alpha_3 \frac{v_3^2}{2} + gH_s = \alpha_4 \frac{v_4^2}{2} + Y_{Z3,4}. \quad (3.8)$$

Priamím dosadením do rovnice (3.5) dostávame energetickú bilanciu v prípade s využitím sacej trúby

$$\Delta Y_{+SP} = \alpha_4 \frac{v_4^2}{2} + Y_{Z3,4}. \quad (3.9)$$

Dospeli sme k finálnemu kroku, kedy dokážeme vyjadriť energetický zisk sacej trúby

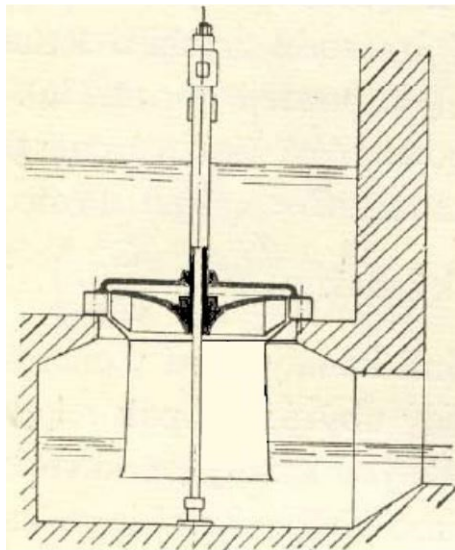
$$\Delta Y_{-SP} - \Delta Y_{+SP} = gH_s + \frac{1}{2} \left( \alpha_3 \frac{v_3^2}{2} - \alpha_4 \frac{v_4^2}{2} \right) - Y_{Z3,4}. \quad (3.10)$$

### 3.2. VÍROVÁ TURBÍNA

#### Účinnosť

Významnosť sacej trúby na celkovej účinnosti turbíny je možné postrehnúť pri nízkospádových vodných elektrárnach, kde 30 – 50 % celkovej energie je spracováanej práve v sacej trúbe.[8]

Primárne delenia sacích trúb je na priame a kolenové. Účinnosť premeny energie je u priamých sacích trúb až okolo 0,9.



Obrázok 3.2: Priama sacia trúba [9]

Prúdením kvapaliny v zakrivenom kanáli, akým je napr. kolenová sacia trúba, pôsobí na kvapalinu odstredivá sila, ktorej pôsobením vzniká priečne prúdenie, čím sa zvyšujú energetické straty. Z tohto dôvodu dosahujú kolenové sacie trúby menšiu účinnosť a to okolo 0,6 – 0,85. Hlavnými parametrami ovplyvňujúcimi premenu energie sú vlastnosti prúdenia na vstupe do sacej trúby (turbulencia, symetria prúdu, rotačná zložka rýchlosti).[6][5]

Hodnota, ktorá nám vyjadruje schopnosť premeny vstupnej kinetickej energie na tlakovú v sacej trúbe nazývame *koeficientom tlakovej regenerácie*  $c_p$ . Je definovaný ako pomer rozdielu statických tlakov na výstupe a vstupe do sacej trúby ku vstupnému dynamickému tlaku

$$c_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v_1^2}. \quad (3.11)$$

Účinnosť sacej trúby (všeobecne difúzora) dostaneme ako pomer koeficientu tlakovej regenerácie pri prúdení reálnej kvapaliny a koeficientu tlakovej regenerácie pri prúdení ideálnej kvapaliny<sup>4</sup>[8]

$$\eta = \frac{c_p}{c_{pi}}, \quad (3.12)$$

kde  $c_{pi} = \alpha_1 - \alpha_2 \frac{S_1^2}{S_2^2}$ ,  $S_i$  predstavuje plochu prierezu v  $i$ -tom bode.

<sup>4</sup>základnými vlastnosťami ideálnej kvapaliny je nestlačiteľnosť a neviskóznosť

#### Výskum v oblasti tvarovej optimalizácie v mechanike tekutín

Pri prúdení kvapaliny potrubiami dochádza ku hydraulickým odporom (strátam). To sa prejaví úbytkom tlakovej, kinetickej alebo polohovej energie a zmenou na energiu tepelnú. Straty možno rozdeliť na trecie a miestne, kde trecie sú spôsobené trecími silami a sú závislé na dĺžke potrubia a miestne straty vznikajú okrem iného na miestach zmeny prietoku profilu.

V prípade spojitej zmeny profilu je komplikovanejším prípadom difúzor<sup>5</sup>, u ktorého hrozí odtrhnutie vrstvy vody od okrajov potrubia alebo vznik vírového prúdenia pri nesprávnom návrhu.[5]

Preto je optimalizácia nevyhnutným krokom v snahe minimalizovať vznik strát pri prúdení potrubím. V súčasnej dobe rozvoja výpočtovej techniky je základným kameňom tvarovej optimalizácie prepojenie výpočtového softvéru s matematickou optimalizáciou.

---

<sup>5</sup>okrem difúzora sa v hydromechanike využíva konfúzor, u ktorého dochádza k spojitému zmenšeniu prietokov jeho profilu v smere prúdenia kvapaliny

## 4. Matematická optimalizácia

Podkapitoly 4.1 a 4.2 vychádzajú z literatúry [1].

### 4.1. Formulácia problému matematickej optimalizácie

Optimalizácia je proces zaoberajúci sa hľadaním takých bodov funkcie, v ktorých dosahuje extrém.

**Definícia 4.1.1.** Úloha minimalizovať funkciu  $f(\mathbf{x})$  pre  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  sa nazýva úlohou nepodmienennej optimalizácie. Značiť ju budeme v tvare

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}),$$

kde

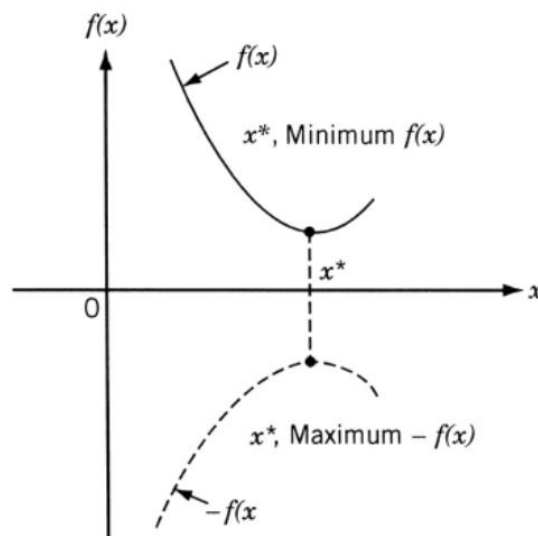
$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je kritériálna funkcia,

$\mathbf{x}$  je vektor nezávislých optimalizačných premenných.

V prípade, že  $\mathbf{x} \in \Omega$ , kde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , hovoríme o podmienenej optimalizácii. Množina  $\Omega$  vyjadruje povolenú oblasť riešenia prostredníctvom podmienok zadaných v tvare rovníc a nerovníc.

Platnosťou vzťahu

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) = -\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} (-f(\mathbf{x})) \quad (4.1)$$



Obrázok 4.1: Znázornenie platnosti vzťahu (4.1)[11]

sa môžeme v ďalšej časti práce vymedziť len na minimalizáciu.

**Definícia 4.1.2.** Minimalizáciou funkcie  $f(\mathbf{x})$  rozumieme hľadanie nejakého minima tejto funkcie.

Z definíc 2.1.1 a 2.1.2 už vieme, že sa môže jednať o minimá lokálne alebo globálne. V nasledujúcich kapitolách sa obmedzíme len na hľadanie lokálnych miním, keďže globálna optimalizácia je komplexnejším problémom.

## 4.2. Podmienky optimality

Slúžia k skúmaniu riešiteľnosti úlohy nepodmienej optimalizácie v zmysle lokálneho minima. Základné delenie podmienok optimality je podľa rádu derivácií zadanej funkcie. Ďalšie kategorizovanie môže nastať v prípade ak riešime, či sa jedná o podmienku nutnú alebo postačujúcu.

**Veta 4.2.1.** (*Nutná podmienka optimality 1. rádu*)

Nech  $f \in C^1$  a nech  $\mathbf{x}^*$  je bodom lokálneho minima funkcie  $f$ . Potom v  $\mathbf{x}^*$  platí

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0},$$

tj.  $\mathbf{x}^*$  je stacionárnym bodom funkcie  $f$ .

**Veta 4.2.2.** (*Nutná podmienka optimality 2. rádu*)

Nech  $f \in C^2$  a nech  $\mathbf{x}^*$  je bodom lokálneho minima funkcie  $f$ . Potom v  $\mathbf{x}^*$  platí

$$1. \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0},$$

$$2. \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \text{ je pozitívne semidefinitná matica, tj.}$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \mathbf{p} \geq 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n.$$

**Veta 4.2.3.** (*Postačujúca podmienka optimality 2. rádu*)

Nech  $f \in C^2$  a nech v bode  $\mathbf{x}^*$  platí

$$1. \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0},$$

$$2. \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \text{ je pozitívne definitná matica, tj.}$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*) \mathbf{p} > 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{p} \neq \mathbf{0}.$$

Potom  $\mathbf{x}^*$  je bodom ostrého lokálneho minima funkcie  $f$ .

## 4.3. Klasifikovanie optimalizačných metód

Funkciu  $f$  je možné vyjadriť prostredníctvom Taylorovho radu v bode  $\mathbf{x}$  v tvare:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{p} + \dots,$$

kde  $\mathbf{p}$  vyjadruje vektor zmeny a  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  je hessián. Jednou z možností rozdelenia optimalizačných metód je podľa počtu členov Taylorovho rozvoja, ktoré využívajú. Metódy priameho hľadania pracujú iba s hodnotami funkcie  $f$ , pri gradientných metódach dochádza k lineárnej aproximácii funkcie  $f$  v blízkom okolí stacionárneho bodu a kvadratickú aproximáciu funkcie  $f$  využíva Newtonová metóda a niektoré jej modifikácie.[6]

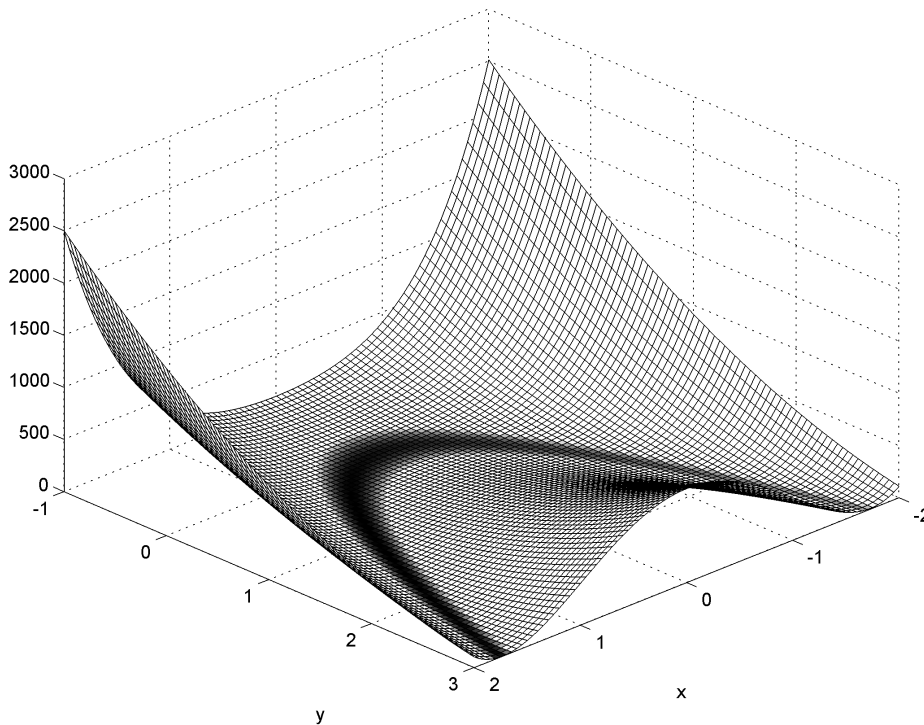
## 4.4. Testovanie optimalizačných algoritmov

Správnosť fungovania optimalizačných metód pri hľadaní extrémů môžeme otestovať pomocou špeciálnych, tzv. testovacích funkcií, u ktorých poznáme hodnotu extrémů. Okrem overenia pozície a hodnoty extrémů nám môžu pomôcť popísať charakteristiky optimalizačného algoritmu (rýchlosť konvergenzie, presnosť a robustnosť metód).<sup>[12]</sup>

Medzi známe testovacie funkcie radíme Rosenbrockovu funkciu, ktorá patrí medzi unimodálne<sup>1</sup> funkcie.

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ 100 (x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2 \right]$$

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pre} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$



Obrázok 4.2: Rosenbrockova funkcia v  $\mathbb{R}^3$

Aj napriek tomu, že „údolie“ funkcie nie je problematické nájsť, konvergencia k minimu je značne komplikovaná.

<sup>1</sup>funkcia dosahuje len jeden extrém na vybranom intervale



## 5. Priame metódy

Metódy priameho hľadania sú iteračné a heuristické<sup>1</sup> metódy, ktoré nevyužívajú derivácie kritériálnej funkcie. To znamená riešiť úlohu

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}),$$

kde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , za predpokladu spojitej diferencovateľnosti funkcie  $f(\mathbf{x})$ , avšak bez výpočtu derivácií danej funkcie.

Rozvíjané boli najmä v šesťdesiatych rokoch dvadsiateho storočia, avšak už na začiatku rokov sedemdesiatych začali byť odmietané matematikmi zaoberajúcimi sa optimalizáciou. Hlavnými dôvodmi bola heuristickosť metód, neexistencia dôkazu o ich konvergencii a občasná pomalá konvergencia.[13]

Z veľkej časti boli nahradené sofistikovanejšími optimalizačnými algoritmami, avšak aj napriek tomu sú tieto metódy používané dodnes. Prvým a najdôležitejším dôvodom, prečo sú dané metódy stále aktuálne je ich spoľahlivosť, vďaka čomu ich radíme medzi robustné metódy. Ďalším, nemenej dôležitým bodom je ich možnosť aplikácie aj na nelineárne optimalizačné problémy, kde množstvo prepracovaných metód zlyháva.[14]

Metódy priameho hľadania sa dajú obecné zapísať v tvare

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k \lambda_k,$$

kde  $\mathbf{s}_k$  predstavuje dĺžku kroku v smere  $\lambda_k$ . Podľa toho ako sa určuje dĺžka kroku a smerový vektor, delíme priame metódy na metódy náhodného hľadania, metódy založené na hľadaní vzoru a simplexové metódy.[6]

### 5.1. Simplexové metódy

Sú to metódy, využívané najmä vďaka zrozumiteľne spracovateľnému postupu pri hľadaní extrému. Ich algoritmus je založený na práci so simplexom, predstavujúcim konvexný útvar s neprázdny vnútrojškom. Simplex sa v priestore  $\mathbb{R}^n$  skladá z  $n + 1$  navzájom rôznych vrcholov, tj. v rovine  $\mathbb{R}^2$  sa jedná o trojuholník, v priestore  $\mathbb{R}^3$  hovoríme o štvorstene, etc.

Princíp postupu pri hľadaní minima funkcie spočíva v porovnávaní hodnôt vo vrcholoch simplexu, vybratím vrcholu s najvyššou funkčnou hodnotou a následným nahradením tohto bodu bodom vhodnejším. Týmto iteračným procesom vytvárame nové simplexu dovtedy, pokiaľ nie je nami zadané ukončovacie kritérium splnené. Medzi najznámejších predstaviteľov tejto skupiny patria metódy Nelder-Mead, Hooke-Jeeves a Powellova metóda. Rozdiel medzi jednotlivými metódami je v spôsobe konštrukcie nového simplexu. [1][10][15]

---

<sup>1</sup>heuristická metóda je logický postup, pri ktorom je potrebné zvažovať dosiahnuté výsledky, ich zhromažďovanie a porovnávanie

## 5.2. Nelder-Mead

Metóda Nelder-Mead bola publikovaná v roku 1965 jej autormi Johnom A. Nelderom a Rogerom Meadom[16] ako modifikácia simplexovej metódy z roku 1962, ktorú navrhli Spendley, Hext a Himswort[17].

Metóda je využívaná v technickej realizácii, populárnou je aj v oblasti chémie a medicíny.

Teoretický podklad k vypracovaniu celej kapitoly je čerpaný z literatúry [1].

### 5.2.1. Voľba počiatočného simplexu a parametrov

Prvým krokom algoritmu je vytvorenie simplexu. Pri tvorbe pravidelného simplexu o dĺžke strany  $a$  môžeme využiť nasledujúci vzťah:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_1 + p\mathbf{e}_j + \sum_{k \neq j} q\mathbf{e}_k,$$

kde

$\mathbf{x}_1$  je zadaný vrchol

$\mathbf{e}_k$  sú jednotkové bázové vektory

a

$$p = \frac{a}{n\sqrt{2}} (\sqrt{n+1} + n - 1) \quad q = \frac{a}{n\sqrt{2}} (\sqrt{n+1} - 1),$$

kde  $n$  je dimenzia. Dôležitou časťou Nelder-Meada ovplyvňujúcou presnosť a tým aj výpočtový čas je ukončovacie kritérium, ktoré sa zvyčajne udáva v tvare:

$$\left( \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} [f_i - f(\bar{\mathbf{x}})]^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon,$$

kde  $\epsilon$  predstavuje požadovanú presnosť. Metóda Nelder-Mead sa skladá zo štyroch operácií, ktorých prevedenie závisí na zvolených parametroch.

1. reflexia  $\rho > 0,$
2. expanzia  $\eta > 1, \eta > \rho,$
3. kontrakcia  $0 < \gamma < 1,$
4. redukcia  $0 < \sigma < 1.$

Voľba jednotlivých parametrov závisí na výbere užívateľa a tým predstavuje heuristickosť algoritmu, avšak zvyčajné hodnoty sú volené nasledovne:

$$\rho = 1 \quad \eta = 2 \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \sigma = \frac{1}{2}$$

### 5.2.2. Algoritmus metódy Nelder-Mead

#### 1. krok

Prvý krok pozostáva zo zoradenia vrcholov simplexu vzostupne podľa funkčnej hodnoty cieľovej funkcie, tj.

$$f_1 = f(\mathbf{x}_1) \leq \dots \leq f_{n+1} = f(\mathbf{x}_{n+1}).$$

Následne sa skontroluje splnenie tolerančnej podmienky. V prípade dosiahnutia požadovanej tolerancie dochádza k ukončeniu cyklu.

#### 2. krok - reflexia

V druhom kroku dochádza k nájdeniu ťažiska (centroidu)  $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$ . Následne sa vypočítajú súradnice bodu reflexie  $\mathbf{x}_R = \bar{\mathbf{x}} + \rho(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_{n+1})$  a vyčíslenie  $f_R = f(\mathbf{x}_R)$ .

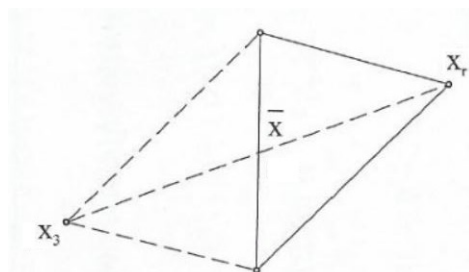
**If**  $f_1 \leq f_R \leq f_n$

**then**

akceptovanie vrcholu  $\mathbf{x}_R$  a ukončenie iterácie

**end**

Reflexia sa nás snaží zbaviť najhoršieho bodu použitím stredovej súmernosti so stredom súmernosti v centroide  $\bar{\mathbf{x}}$



Obrázok 5.1: Operácia reflexie v rovine[1]

#### 3. krok - expanzia

Operácia expanzia prebehne iba v tom prípade, ak  $f_R \leq f_1$ . Ak je podmienka splnená vypočíta sa expanzný bod  $\mathbf{x}_E = \bar{\mathbf{x}} + \eta(\mathbf{x}_R - \bar{\mathbf{x}})$  a hodnota  $f_E = f(\mathbf{x}_E)$ .

**If**  $f_R < f_1$

**then**

vypočítanie bodu  $\mathbf{x}_E$  a hodnoty  $f_E$

**If**  $f_E < f_R$

**then**

akceptujeme  $\mathbf{x}_E$  a iteráciu ukončíme

**else**

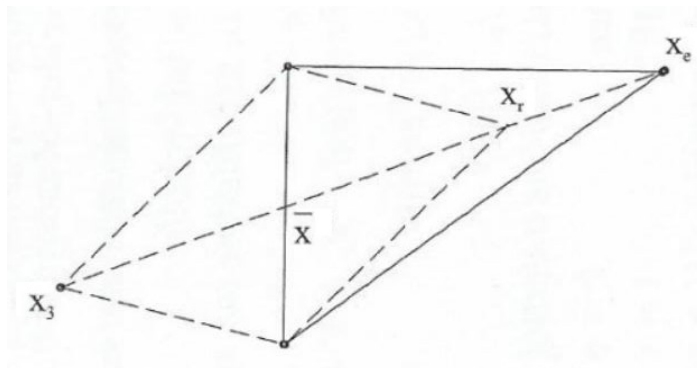
akceptujeme  $\mathbf{x}_R$  a iteráciu ukončíme

**end**

**end**

## 5.2. NELDER-MEAD

Úlohou expanzie je testovanie spádového smeru a prípadné posunutie vrcholu nového simplexu v tomto smere.



Obrázok 5.2: Operácia expanzie v rovine[1]

### 4. krok - kontrakcia

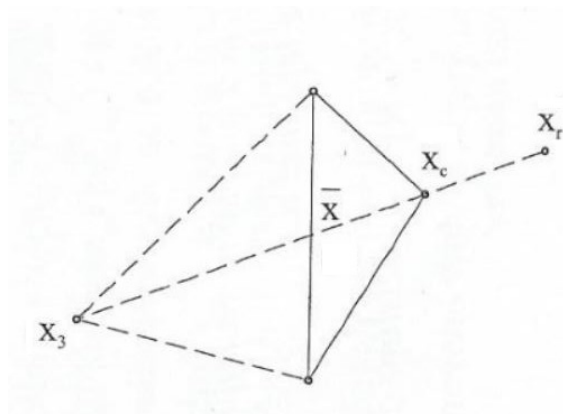
Ku kontrakcii dôjde v prípade splnenia podmienky v tvare  $f_R \geq f_n$ . Podľa toho, ktorý z vrcholov  $\mathbf{x}_R$  alebo  $\mathbf{x}_{n+1}$  je vhodnejší nastane buď vonkajšia kontrakcia alebo vnútorná. Bod vonkajšej kontrakcie dostaneme využitím vzťahu  $\mathbf{x}_C = \bar{\mathbf{x}} + \gamma(\mathbf{x}_R - \bar{\mathbf{x}})$  a bod vnútornej kontrakcie  $\mathbf{x}_{CC} = \bar{\mathbf{x}} + \gamma(\mathbf{x}_{n+1} - \bar{\mathbf{x}})$ . V súlade s výberom bodu dopočítame hodnotu  $f_C = f(\mathbf{x}_C)$  resp.  $f_{CC} = f(\mathbf{x}_{CC})$ .

```

If  $f_R \geq f_n$ 
then
  If  $f_n \leq f_R < f_{n+1}$ 
  then
    vypočítame bod vonkajšej kontrakcie  $\mathbf{x}_C$  a  $f_C$ 
    If  $f_C \leq f_R$ 
    then
      akceptujeme vrchol  $\mathbf{x}_C$  a iteráciu ukončíme
    else
      prejdeme na 5. krok
    end
  else
    vypočítame bod vonkajšej kontrakcie  $\mathbf{x}_{CC}$  a  $f_{CC}$ 
    If  $f_{CC} < f_{n+1}$ 
    then
      akceptujeme vrchol  $\mathbf{x}_{CC}$  a iteráciu ukončíme
    else
      prejdeme na 5. krok
    end
  end
end

```

Kontrakcia nastáva v prípade, ak sme reflexiou nedosiahli zlepšenie. Najprv je snaha o využitie vonkajšej kontrakcie, ak táto snaha končí neúspechom, pokúsime sa využiť vnútornú kontrakciu.



Obrázok 5.3: Operácia vonkajšej kontrakcie v rovine[1]

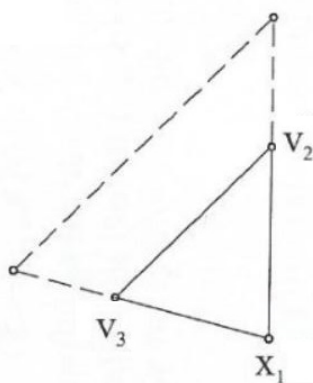
### 5. krok - redukcia

V tejto operácii dochádza k zmenšeniu veľkosti hrán simplexu využitím vzťahu

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_1 + \sigma(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) \quad i = 1, \dots, n+1,$$

čím dostávame nový simplex  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$ , pričom  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$ .

Redukcia je východiskom pri zlyhaní zvyšných operácií, uplatňuje sa v okolí minima.



Obrázok 5.4: Operácia redukcie v rovine[1]

Po uskutočnení jednej iterácie je výsledkom buď prijatie nového vrcholu simplexu, resp. v prípade redukcie dochádza k vytvoreniu  $n$  nových vrcholov.

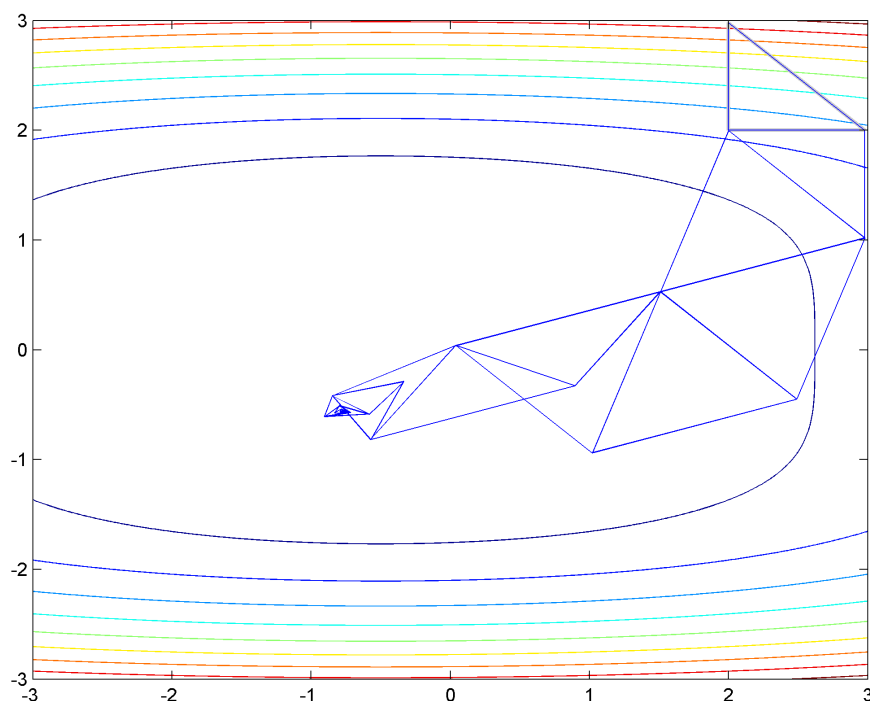
## 5.2. NELDER-MEAD

Obmedzeniami tejto metódy sú pomalá konvergencia a možnosť zlyhania algoritmu pri optimalizovaní väčšieho množstva premenných ( $n \geq 10$ ). Aj napriek tomu je metóda stále vcelku populárna, o čom svedčí jej implementácia v Matlabe v podobe funkcie **fminsearch**.

Zároveň je dôležitým faktom to, že sa jedná o lokálnu metódu. Z toho vyplýva, že po nájdení lokálneho minima sa metóda pravdepodobne ukončí a nájdenie globálneho extrémumu nie je zaručené. Voľba parametrov  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$ , dĺžka simplexu, či najmä voľba počiatočného simplexu sú faktormi, ktoré ovplyvňujú úspešnosť metódy.

Pre grafické znázornenie je vhodná funkcia  $f(x, y) = x^2 + y^4 + x - \sin(xy)$ , v ktorej je možné podrobne pozorovať jednotlivé kroky procesu. Počiatočný simplex bol tvorený bodmi  $x_1 = [2; 2]$ ,  $x_2 = [2, 8; 2]$ ,  $x_3 = [2; 2, 8]$ .

Pre minimum funkcie platí  $f(-0,754; -0,5563) = -0,497$ .



Obrázok 5.5: Proces minimalizácie funkcie využitím metódy Nelder-Mead

## 6. Newtonová metóda a jej modifikácie

Primárnym zdrojom k vytvoreniu tejto kapitoly je literárny zdroj [1].

### 6.1. Newtonova metóda

Pred samotným venovaním metóde BFGS by bolo vhodné venovať sa jej predchodcovi - Newtonovej metóde.

Jedná sa o metódu druhého rádu a funkciu  $f$  budeme z tohto dôvodu aproximovať Taylorovým polynómom stupňa dva so zanedbaním zvyšku

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{p}) \simeq \hat{f}(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}) \mathbf{p}.$$

Prostredníctvom vety 2.5.1 je možné poznamenať, že za predpokladu pozitívnej definitnosti matice  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  je funkcia  $\hat{f}(\mathbf{p})$  rýdzo konvexná. Z toho vyplýva, že má jediné minimum, ktoré nájdeme užitím vzťahu

$$\nabla \hat{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \tag{6.1}$$

Označme si vektor  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  a maticu  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x})$ . Po vyriešení sústavy rovníc (6.1) dostávame rovnice v tvare

$$\mathbf{g} + \mathbf{H}\mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

**Definícia 6.1.1.** *Smer  $\mathbf{p} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}$  sa nazýva Newtonov, resp. hovoríme o newtonovskom smere.*

Newtonov smer je spádovým len v prípade pozitívne definitnej matice  $\mathbf{H}$ , lebo vtedy je garantovaná platnosť vzťahu z vety 2.6.1:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{g} = -\mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} < 0 \quad \forall \mathbf{p} \neq \mathbf{0},$$

kde  $-\mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p} < 0$  predstavuje alternatívnu definíciu o pozitívnej definitnosti matice.

#### Obecný algoritmus Newtonovej metódy

Zvolenie iníciaľného bodu  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , tolerancie  $\epsilon > 0$  a nastavenie  $\mathbf{k} = 0$

**while** nie je splnené ukončovacie kritérium **do**

$$\mathbf{p}_k = -\mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{g}_k \quad (\text{sústava rovníc})$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k \quad (\alpha = 1)$$

$$k = k + 1$$

**end**

Medzi hlavné nevýhody Newtonovej metódy sa radí závislosť konvergenčných vlastností na výbere počiatočného bodu, potreba riešiť hessiány  $\mathbf{H}_k$  v každej iterácii a nutnosť riešiť sústavy lineárnych rovníc. Oproti tomu dosahuje Newtonova metóda kvadratickú rýchlosť konvergenzie a  $\alpha = 1$  v každom kroku iterácie, čím nás nezatažuje úlohou riešiť dĺžku kroku.

## 6.2. Kvázinewtonovské metódy

Ich vznik je podmienený snahou o odstránenie hlavných nevýhod Newtonovej metódy, tj. eliminácia výpočtov hessiánov a minimalizovanie závislosti konvergenie na výbere počiatočného bodu. Sú značnými modifikáciami Newtonovej metódy a v nepodmienenej optimalizácii sa radia do kategórie najpoužívanějších metód.

### 6.2.1. Myšlienka kvázinewtonovských metód

U kvázinewtonovských metód dochádza k aproximovaniu funkcie  $f$  prostredníctvom

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{p}) \simeq \hat{f}(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{p},$$

kde matica  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  predstavuje aproximáciu hessiánu  $\mathbf{H}$  a v ďalšom texte ju budeme značiť  $\mathbf{B}$ . Opätovným užitím vety 2.5.1 zisťujeme, že funkcia  $\hat{f}(\mathbf{p})$  je rýdzo konvexná a má jedno minimum. Obdobne ako u Newtonovej metódy riešenie  $\nabla \hat{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  vedie na tvar

$$\mathbf{p} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{g}$$

predstavujúci spádový smer. Po určení spádového smeru, dochádza k vypočítaniu nového bodu  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k$ . Hodnotu  $\alpha$  je možné dopočítať mnohými spôsobmi, často sa aplikuje algoritmus Armijovho spätného vyhľadávania alebo prostredníctvom silnejších Wolfeho podmienok. Postup kvázinewtonovskej metódy v  $k$ -tom kroku iterácie pokračuje určením matice  $\mathbf{B}_{k+1}$ , pričom požadujeme zhodnosť gradientov v bodoch  $\mathbf{x}_{k+1}$  a  $\mathbf{x}_k$  pre funkcie  $f$  a  $\hat{f}$ . Odvođením sa dá získať vzťah

$$\mathbf{B}_{k+1} \mathbf{s}_k = \mathbf{y}_k, \quad (6.2)$$

kde  $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k = \alpha \mathbf{p}_k$  a  $\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k$ . Sústavu rovníc (6.2) nazývame kvázinewtonovskou podmienkou.

Ak okrem zhodnosti gradientov v daných bodoch budeme požadovať pozitívnu definitnosť matice  $\mathbf{B}_{k+1}$  bude navyše platiť podmienka krivosti

$$(\mathbf{s}_k)^T \mathbf{y}_k > 0.$$

K podmienke krivosti sa viaže nasledujúca veta, ktorú nazývame 1.veta o platnosti krivosti.

**Veta 6.2.1.** *Ak výpočet dĺžky kroku  $\alpha_k$  je presný a ak matica  $\mathbf{B}_k$  je pozitívne definitná, potom platí podmienka krivosti.*

Prvú spomínanú podmienku (tj. kvázinewtonovskú podmienku) je možné splniť viacerými spôsobmi, najčastejšie využitím

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \mathbf{U}_k(\mathbf{s}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{B}_k),$$

kde  $\mathbf{U}_k$  predstavuje maticu aktualizácie (ang. update) nízkej hodnoty.

Riešenie matice  $\mathbf{B}_{k+1}$  vedie k vyriešeniu sústavy lineárnych rovníc, ktorej sa môžeme zbaviť uvažovaním novej aproximácie v tvare  $\mathbf{G} = \mathbf{B}^{-1}$ .



## 6. NEWTONOVÁ METÓDA A JEJ MODIFIKÁCIE

**Veta 6.2.2.** *Nech matica  $\mathbf{A}$  je štvorcová a regulárna. Ak je matica  $\mathbf{A}$  navyše pozitívne definitná, je aj inverzná matica  $\mathbf{A}^{-1}$  pozitívne definitná.*

Prostredníctvom tejto vety je možné vykonať aproximáciu  $\mathbf{G} = \mathbf{B}^{-1}$  bez obáv o stratu pozitívnej definitnosti matice.

### Obecný algoritmus kvázinewtonovských metód

Zvolenie iniciálneho bodu  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , tolerance  $\epsilon > 0$ , výber symetrickej pozitívne definitnej matice  $\mathbf{G}_0$  a nastavenie  $\mathbf{k} = 0$

**while** nie je splnené ukončovacie kritérium **do**

$$\mathbf{p}_k = -\mathbf{G}_k \mathbf{g}_k$$

určenie kroku  $\alpha_k$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$$

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k$$

Podľa zvolenej metódy určíme maticu aktualizácie  $\mathbf{U}_k$

$$\mathbf{G}_{k+1} = \mathbf{G}_k + \mathbf{U}_k$$

$$k = k + 1$$

**end**

## 6.3. BFGS

Metóda BFGS je najznámejšou kvázinewtonovskou metódou dosahujúcou superlineárnu rýchlosť konvergencie. Jej teoretická aj výpočtová časť pozostáva z rovnakých krokov ako pri kvázinewtonovských metódach, rozdiel je len v tzv. formulách, ktorými sa jednotlivé kvázinewtonovské metódy odlišujú.

Formula BFGS je v tvare

$$\mathbf{G}_{k+1} = \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{s}_k (\mathbf{y}_k)^T}{(\mathbf{s}_k)^T \mathbf{y}_k} \right) \mathbf{G}_k \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{y}_k (\mathbf{s}_k)^T}{(\mathbf{y}_k)^T \mathbf{s}_k} \right) + \frac{\mathbf{s}_k (\mathbf{s}_k)^T}{(\mathbf{s}_k)^T \mathbf{y}_k},$$

kde  $\mathbf{I}$  značí jednotkovú maticu, pričom matica  $\mathbf{G}_0 = \mathbf{I}$ .

Je žiadúce, aby si postupnosť  $\{\mathbf{G}_k\}$  udržiavala pozitívnu definitnosť. Podmienku prenosu pozitívnej definitnosti pre metódu BFGS zahŕňa nasledujúca veta.

**Veta 6.3.1.** *Za predpokladu platnosti krivostnej podmienky, zachováva formula BFGS pozitívnu definitnosť.*

Poslednou poznámkou k tejto metóde je voľba ukončovacieho kritéria. Zvyčajne je volené v tvare  $\|\mathbf{g}\| < \epsilon$ , čo môžeme interpretovať tak, že daný algoritmus prebieha dovtedy, pokiaľ norma z vektoru  $\mathbf{g}$  nie je menšia ako zvolená tolerancia  $\epsilon$ .

### 6.3. BFGS

#### 6.3.1. Armijové spätné vyhľadávanie

Je algoritmus, ktorý pri výbere dĺžky kroku zabráňuje vytváraniu priveľmi malých alebo veľkých krokov.

#### Obečný algoritmus Armijovho spätného vyhľadávania

zvolenie parametrov  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\tau \in (0, 1)$ , iniciálnej dĺžky kroku  $\alpha_0 > 0$  a nastavenie  $l = 0$

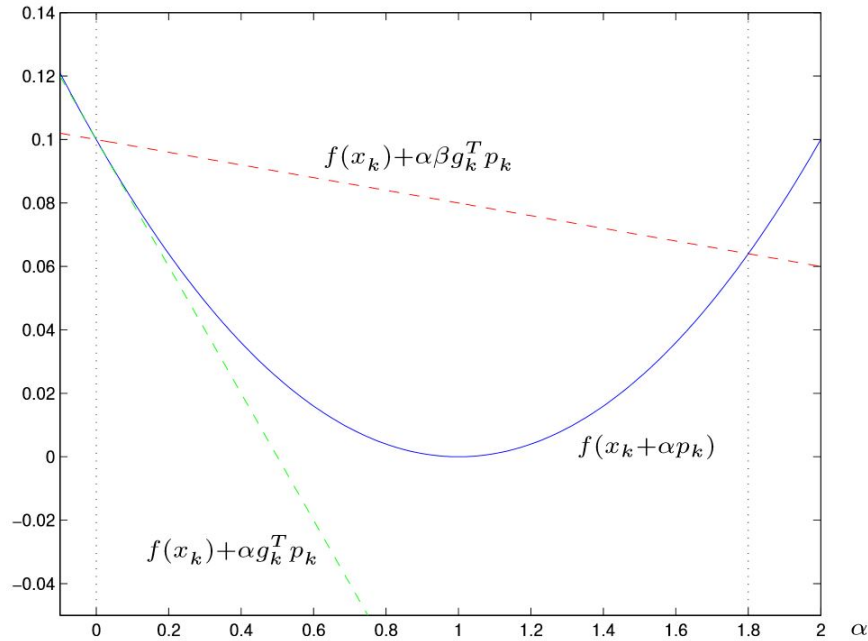
```
while  $f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) > f(\mathbf{x}_k) + \alpha_l \beta (p_k)^T \mathbf{g}_k$   
     $\alpha_{l+1} = \tau \alpha_l$   
     $l = l + 1$   
end
```

Hodnota  $\beta$  býva často volená len z intervalu  $\langle 10^{-1}, 10^{-4} \rangle$  a primárna hodnota parametru  $\tau$  je 0,5.

Cyklus sa teda ukončí v prípade splnenia tzv. Armijovej podmienky

$$f(\mathbf{x}_k + \alpha_l \mathbf{p}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) + \alpha_l \beta (p_k)^T \mathbf{g}_k. \quad (6.3)$$

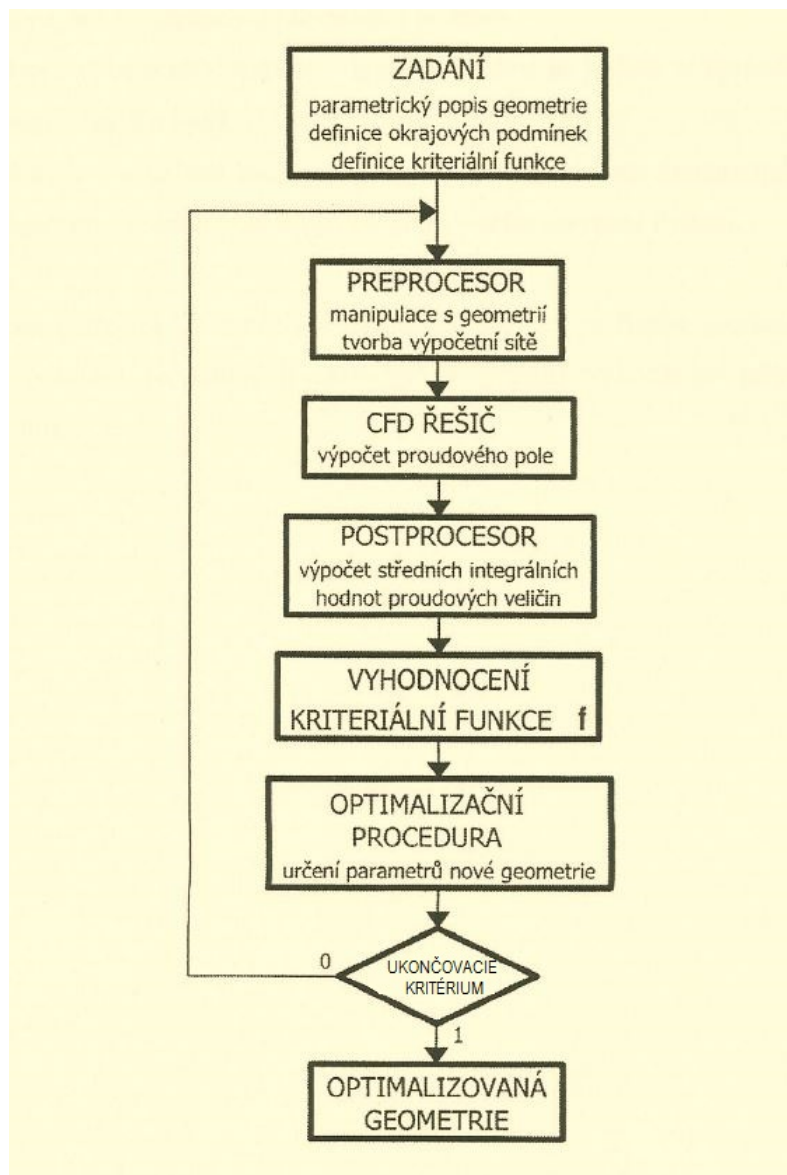
Pre jej lepšie pochopenie je vhodné preskúmanie nasledujúceho obrázku. Červená prerušovaná priamka znázorňuje pravú stranu Armijovej podmienky. Má zápornú smernicu a pre malé hodnoty  $\alpha$  prechádza oblasťou nad grafom vďaka parametru  $\beta \in (0, 1)$ . Výber  $\beta = 1$  reprezentuje zelená prerušovaná čiara znázorňujúca dotyčnicu v danom bode. V prípade  $\beta = 0$  dostaneme konštantnú priamku  $f(x_k) = 0,1$ . Ku splneniu nerovnosti (6.3) dochádza v prípade voľby dĺžky kroku z intervalu  $(0; 1,8)$ .



Obrázok 6.1: Armijová podmienka[18]

## 7. Tvarová optimalizácia v mechanike tekutín

Spôsob vykonávania tvarovej optimalizácie v mechanike tekutín je znázornený na obr. 7.1. Algoritmus tvarovej optimalizácie je klasicky spracovávaný bez zásahu užívateľa až do získania novej optimalizovanej geometrie. Je možné ho uskutočňovať aj v postupných sekvenciách jednotlivých krokov cyklu, čo však predstavuje zdĺhavý a nepraktický spôsob. [6]



Obrázok 7.1: Algoritmus tvarovej optimalizácie[6]

## 7.1. PARAMETRIZÁCIA GEOMETRIE

Veľmi dôležitou časťou tejto slučky je prvý krok, v ktorom zadávame a definujeme kritériálnu funkciu, geometriu a okrajové podmienky úlohy. Je potrebné si uvedomiť, že väčší počet premenných parametrov negatívne ovplyvňuje dobu riešenia. Pozitívny vplyv má však na zlepšenie kritériálnej funkcie, preto je vhodné zvážiť naše nároky kladené na čas výpočtu a požadované zlepšenie.

Krok zvaný Preprocesor je uskutočňovaný v softvéri Gambit, kde je za pomoci jeho interaktívneho makrojazyka prostredníctvom skriptu naprogramovaná automatická tvorba geometrie a výpočtovej siete.

Následujúce dva kroky - CFD riešič a Postprocesor prebiehajú v softvéri ANSYS Fluent podľa inštrukcií naprogramovaných jeho makrojazykom v predpripravenom skripte. Výsledky, ktoré sú výstupom práce s Fluentom, sú ukladané do textových súborov z dôvodu ľahšej práce s dátami, respektíve pre spätnú kontrolu.

Zvyšok slučky, prípadne volanie vyššie spomenutých softvérov a ich skript, je vykonávaný v softvéri Matlab.[6][5]

### 7.1. Parametrizácia geometrie

V technických problémoch pri práci s geometriou skúmaného objektu je potrebné parametrizovanie jeho geometrie z dôvodu neskoršieho upravovania, prípadne zisťovania vplyvov zmeny geometrie na výsledok sledovanej veličiny. Nepodcenením parametrizácie je možné realizovať veľkú škálu možnej tvarovej zmeny pri malom počte optimalizačných parametrov. Vzhľadom k rotačnej symetrii mojej riešenej úlohy, sa v ďalšej časti zameriam len na parametrizáciu prostredníctvom kriviek.

Podklad k teoretickému vytvoreniu tejto kapitoly tvorila literatúra [6].

**Definícia 7.1.1.** *Nech  $x = x(t)$  a  $y = y(t)$  sú funkcie reálnej premennej  $t$ . Potom množina  $C$  všetkých bodov  $\{(x(t), y(t)), a \leq t \leq b\}$  sa nazýva parametrická krivka.*

*Rovnice  $x = x(t)$  a  $y = y(t)$ , pre  $a \leq t \leq b$  nazývame parametrickými rovnicami množiny  $C$ .*

Medzi najznámejšie parametrické krivky využívané v praxi patria Bézierove krivky, ktoré budú aplikované aj pri hľadaní optimalizovanej geometrie sacej turbíny vodného difúzora. Bézierová krivka  $n$ -tého stupňa sa dá parametricky vyjadriť v tvare:

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_{i,n}(t) \mathbf{P}_i \quad t \in [0, 1],$$

kde  $\mathbf{b}_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$  pre  $i = 0, \dots, n$  nazývame Bernsteinovým polynómom stupňa  $n$ . Body  $\mathbf{P}_i$  sú kontrolnými bodmi Bézierovej krivky a lomená čiara vytvorená spojením kontrolných bodov  $\mathbf{P}_i$  sa nazýva riadiaci polygón.

Navyše platí, že konvexný obal riadiaceho polygónu obsahuje Bézierovú krivku.

## 7. TVAROVÁ OPTIMALIZÁCIA V MECHANIKE TEKUTÍN

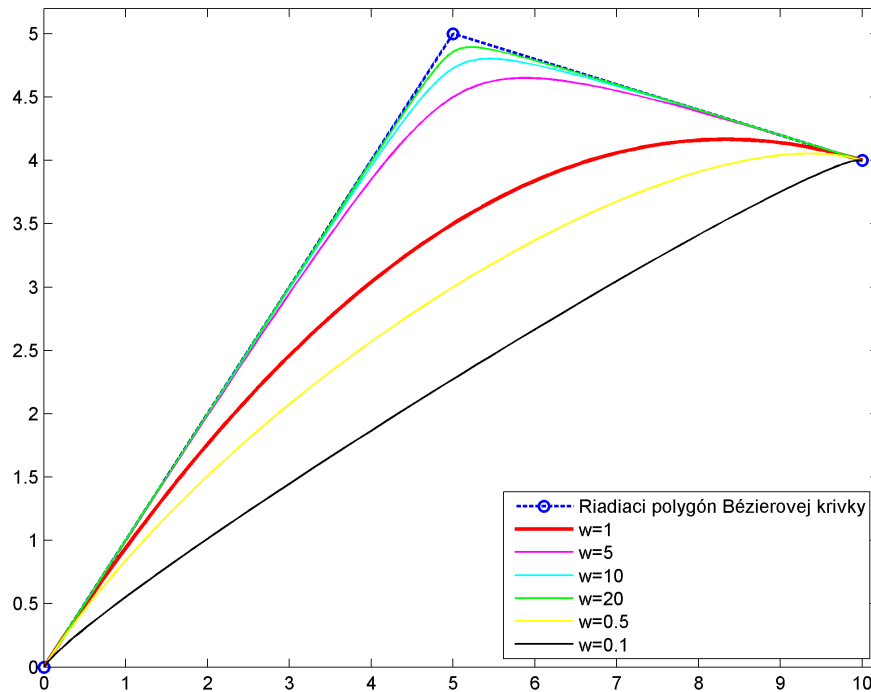
Medzi vlastnosti, ktoré robia z Bézierovej krivky vhodnú voľbu pri parametrizácii patria:

1. Krivka začína v kontrolnom bode  $P_0$  a končí v  $P_n$
2. Dotyčnice v koncových bodoch sú v tvare  $B'(0) = n(P_1 - P_0)$        $B'(1) = n(P_n - P_{n-1})$
3. Stupeň krivky je možné jednoducho zvyšovať pridaním bodu polygónu
4. Bézierové krivky je možné deliť i napájať za dodržania podmienok spojitosti

Lepšie parametrizovanie krivky v blízkosti bodov riadiaceho polygónu môžeme doceliť použitím racionálnych Bézierových kriviek.

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{b}_{i,n}(t) \mathbf{P}_i w_i}{\sum_{i=1}^n \mathbf{b}_{i,n}(t) w_i},$$

kde  $\mathbf{w}_i$  predstavuje váhový parameter.



Obrázok 7.2: Tvar Bézierovej krivky pri rôznych hodnotách  $\mathbf{w}_i$

## 8. Aplikácia metód Nelder-Mead a BFGS pri tvarovej optimalizácii

Cieľom tejto kapitoly je aplikácia poznatkov spísaných v predchádzajúcich kapitolách. Prezintované tu budú výsledky oboch metód pri riešení jednotlivých úloh súčasne, pre lepšiu orientáciu a možnosť okamžitého porovnania dosiahnutých hodnôt.

Pre pripomenutie, riešiť budeme problém tvarovej optimalizácie koncového difúzora vírovej turbíny s cieľom maximalizovania hodnoty koeficientu tlakovej regenerácie a predpokladať budeme rotačnú symetrickosť úlohy.

Tvarová optimalizácia bude riešená obidvomi možnými prístupmi - priamou i nepriamou parametrizáciou geometrie. Pri priamej parametrizácii dochádza pri zmene pozície meneného parametru k okamžitej zmene geometrie. Príkladom je napríklad optimalizácia po častiach lineárneho difúzoru, kedy jednotlivé body sú pospájané priamkami a zmenou polohy jedného parametra dôjde k okamžitej zmene geometrie útvaru.

Príkladom nepriamej parametrizácie je geometria tvorená Bézierovými krivkami. Pri zmene polohy meneného parametru, ktorým je bod riadiaceho polygónu, je nutné prepočítať tvar samotnej krivky.

Priama parametrizácia bude využitá v prvej úlohe, kde bude riešená optimalizácia po častiach lineárneho difúzoru. V ďalších úlohách budú k tvarovej optimalizácii využité Bézierové krivky.

### 8.1. Modifikácia algoritmu BFGS

Algoritmus BFGS, tak ako je predstavený v kapitole vyššie, je možné využiť v prípade ak poznáme priebeh kritériálnej funkcie.

V prípade používania komplexnejšieho výpočtového softvéru ako napr. nami používaný ANSYS, ktorý pre vstupný vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vytvára výstupnú odozvu  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  pomocou  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , pričom predpis  $\mathbf{g}$  nie je známy, ale je skrytý v programe v numerickej metóde, je potrebné algoritmus mierne modifikovať.<sup>[15]</sup>

Exaktne presný gradient nahradíme numerickým výpočtom parciálnych derivácií

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h} \quad i = 1, \dots, n$$

kde zvolíme  $h=0,0001$ .

V ďalšej časti budeme nami modifikovaný algoritmus BFGS značiť BFGS-M.

### 8.2. Príprava na proces optimalizácie

Krokom pred samotnou optimalizáciou je overenie správnosti fungovania naprogramovaných metód. Testovanie prebehne na dvoch n-rozmerných funkciách. Prvou bude paraboloïd a druhou bude samotná Rosenbrocková funkcia, ktorej sme sa stručne venovali v sekcii 4.4.

## 8. APLIKÁCIA METÓD NELDER-MEAD A BFGS PRI TVAROVEJ OPTIMALIZÁCI

Predpis  $n$ -rozmerného paraboloidu je v tvare  $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2$  pričom

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) = 0 \quad pre \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pre Rosenbrockovu funkciu platí

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) = 0 \quad pre \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Iniciálny bod bude volený buď  $\mathbf{x} = (3, 2)^T$  (pre  $n=2$ ), resp.  $\mathbf{x} = (3, \dots, 3)^T$  ( $n=4$ ) u metód BFGS, BFGS-M a v prípade Nelder-Mead bude vytvorený pravidelný simplex s jedným z vrcholov v tomto bode.

Pre metódu Nelder-Mead sú volené parametry  $\rho=1$ ,  $\eta=2$ ,  $\gamma=\sigma = \frac{1}{2}$  a je dĺžka kroku  $a=0,25$  (ak nie je povedané inak). Ukončovacie kritérium je v tvare

$$\left( \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n+1} [f_i - f(\bar{\mathbf{x}})]^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 1 \cdot 10^{-4}.$$

U metód BFGS a BFGS-M je ukončovacie kritérium volené v tvare

$$\|\mathbf{g}\| < 1 \cdot 10^{-3}.$$

Algoritmus metód BFGS a BFGS-M bol ukončený aj v prípade, ak nebola nájdená vhodná dĺžka kroku  $\alpha$ , pre ktorú by platila Armijova podmienka. V takom prípade bol za nájdené minimum uvažovaný posledný bod. Takýto výsledok bude v ďalšom texte označovaný hviezdíčkou (\*).

V nasledujúcich tabuľkách je uvedený prehľad dosiahnutých výsledkov jednotlivých optimalizačných metód. Počet iterácií potrebných k splneniu ukončovacieho kritéria pre jednotlivé funkcie využitím troch spomínaných algoritmov je znázornený v tabuľke 8.1. Tabuľka 8.2 porovnáva dosiahnuté súradnice minima pre  $n=2$  v prípade paraboloidu a Rosenbrockovej funkcie.

Tabuľka 8.1: Počet iterácií jednotlivých metód

n	funkcia	Nelder-Mead	BFGS	BFGS-M
2	Paraboloid	26	1	1*
4		1	1	1*
2	Rosenbrock	47	40	140
4		212	54	54*

## 8.2. PRÍPRAVA NA PROCES OPTIMALIZÁCIE

Tabuľka 8.2: Súradnice nájdených miním jednotlivých metód pre  $n=2$

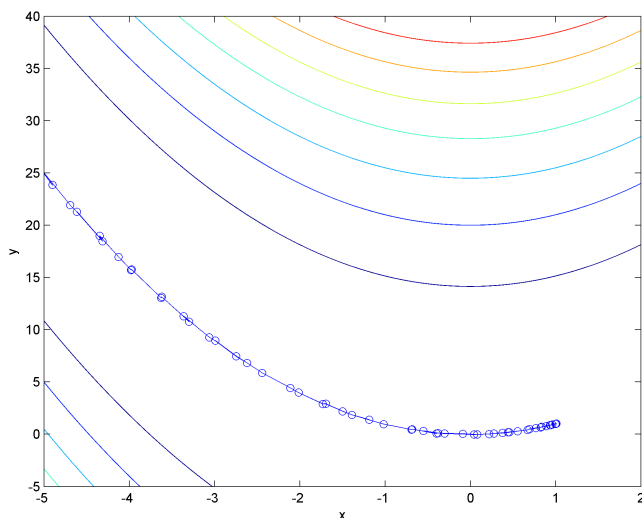
$\mathbf{x}$	funkcia	Nelder-Mead	BFGS	BFGS-M
$x$	Paraboloid	0,0035	0	$-0,5 \cdot 10^{-5}$
$y$		0	0	$-0,5 \cdot 10^{-5}$
$x$	Rosenbrock	0,9996	1	1
$y$		0,9990	1	1,0001

Skúmaním tabuľky 8.2 je možné postrehnúť, že iníciaľny bod volený pre  $n=2$  sa zdá byť „kritickou“ voľbou, najmä pre metódu BFGS-M u testovacej Rosenbrockovej funkcie. Pri skúšaní iného počiatočného bodu potrebuje metóda BFGS-M dvoj- až štvornásobne menší počet iterácií potrebných k nájdeniu minima v porovnaní so 140 iteráciami potrebnými v tomto prípade.

Rovnakého výsledku, 140 iterácií, sme dosiahli aj v prípade, kedy počiatočný bod bol zvolený  $\mathbf{x} = (40, 40)^T$ . Tu je však výsledok sčasti odpodstatnený dlhým prechodom cez „údolie“ ako je vidieť na obrázku 8.1, kde modré kružnice znázorňujú polohy bodov. Tento obrázok obsahuje len výsek celého priebehu, pre lepšie znázornenie vrstevníc. Je možné si všimnúť, že v blízkosti extrém, kedy sa hodnota gradientu blíží nulovému vektoru, dochádza k spomalovaniu postupu.

V inom prípade, kedy  $\mathbf{x} = (4, 4)^T$  bolo splnené ukončovacie kritérium po 39 iteráciách v bode  $[0,9988; 0,9977]^*$ .

Dôvodom, prečo metóda BFGS-M nie je tak spoľahlivo fungujúca ako BFGS je numerický výpočet gradientu, kde môžu vznikať značné numerické chyby. Aj napriek tomu je však metóda BFGS-M presvedčivo úspešná.



Obrázok 8.1: Postup krokov pri hľadaní minima Rosenbrockovej funkcie metódou BFGS-M



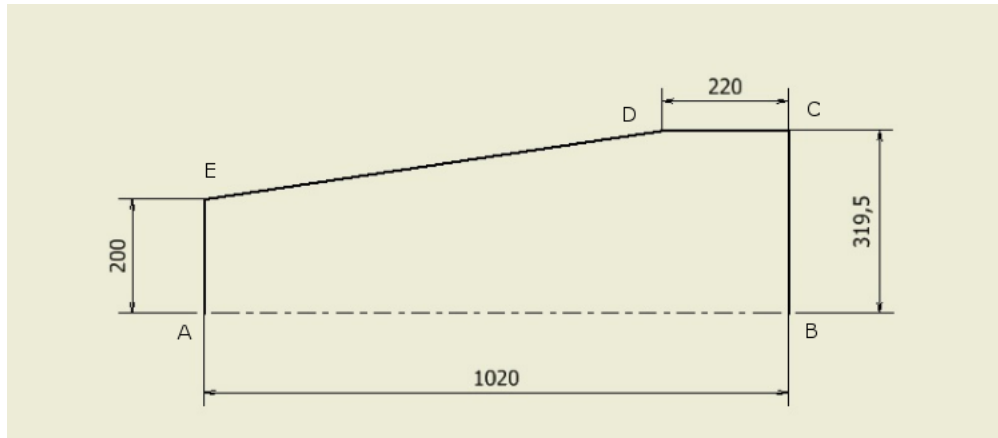
## 8. APLIKÁCIA METÓD NELDER-MEAD A BFGS PRI TVAROVEJ OPTIMALIZÁCII

Po zhodnotení správneho fungovania daných algoritmov sa môžeme zamerať na proces samotnej optimalizácie kritériálnej funkcie. Za kritériálnu funkciu budeme brať koeficient tlakovej regenerácie  $c_p$  určený vzťahom

$$c_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho v_1^2}.$$

Voľba správnej kritériálnej funkcie je kľúčovým krokom ku správnej optimalizácii a jej výber vyžaduje hlboké inžinierske skúsenosti. Je potrebné si uvedomiť, že hodnota kritériálnej funkcie je ovplyvnená typom prúdenia, zvoleným modelom turbulencie a inými aspektami, ktorých hodnoty boli dopredu navolené v CFD riešiči. Takto získaný optimalizovaný tvar je teda vhodný len za splnenia určitých podmienok a teda nie je všeobecne najlepším tvarom.

Pred samotným výpočtom je potrebné zadať technické parametre optimalizovaného tvaru. Pôvodný tvar koncového difúzora je s rozmermi uvedený na obrázku 8.2, kde rozmery sú uvedené v milimetroch. Difúzor uvažujeme rotačne symetrický, a preto je dostačujúce znázorniť len jednu polovicu prierezu. Keďže sa jedná o difúzor, vstup je na ľavej strane a výstup na pravej.



Obrázok 8.2: Iniciálny tvar sacej trúby

Hľadané maximum kritériálnej funkcie závisí od voľby okrajových podmienok. Ako vstupnú rýchlosť nastavíme

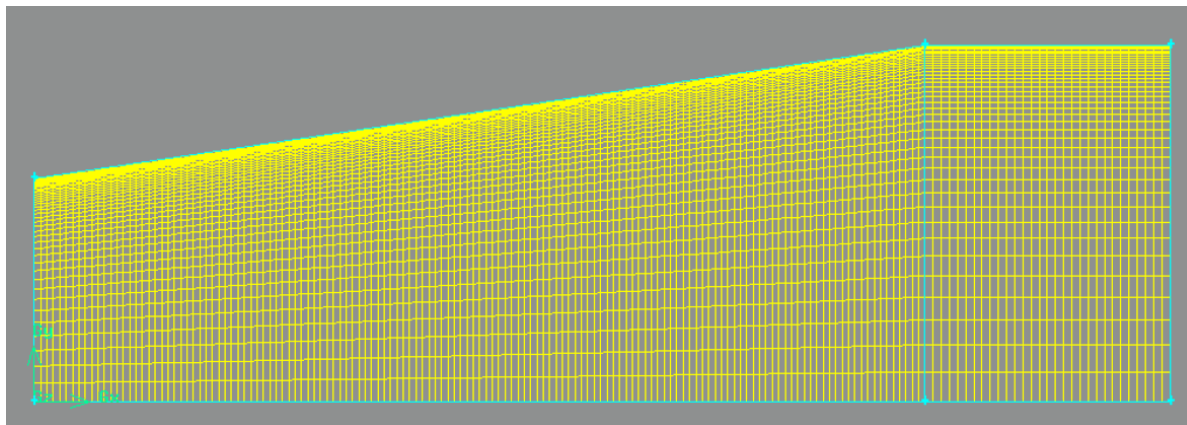
$$v_1 = 2 \text{ m/s}$$

a na výstupný tlak sa vzťahuje okrajová podmienka v tvare

$$p_2 = 0 \text{ Pa}.$$

Hodnoty tlakov potrebných k dopočítaniu koeficientu tlakovej regenerácie  $c_p$  sa získajú riešením parciálnych rovníc - rovnice kontinuity a zákona zachovania hybnosti. Tieto rovnice sú riešené automaticky softvérom Ansys metódou konečných prvkov. Preto je potrebné dodať softvéru Ansys výpočtovú sieť. Tú získame v softvéri Gambit a ukážka výpočetnej siete je znázornená na obrázku 8.3.

Je potrebné zamedziť, aby nevznikali nereálne geometrie, v ktorých nie je možné simulovať priebeh prúdenia. Preto podľa obrázku 8.2 nastavíme podmienky tak, aby všetky body parametrizovanej geometrie ležali napravo od priamky vedenej bodmi A,C a zároveň aby boli vyššie ako priamka prechádzajúca bodmi A,B.



Obrázok 8.3: Ukážka vytvorenej siete v softvére Gambit

V tomto kroku sme už schopní dosiahnuť porovnávaciu hodnotu  $c_p$  iniciálneho tvaru (tvar podľa obrázku 8.2). Kriteiálna funkcia  $c_p$  dosahuje u takéhoto tvaru hodnotu **0,736824**. V tomto kroku je už možné posunúť svoju pozornosť na samotné výpočty a pozorovať zmenu tvaru a hodnoty koeficientu tlakovej regenerácie  $c_p$ .

## 8.3. Tvarová optimalizácia po častiach lineárneho difúzoru

V tejto úlohe dochádzalo k maximalizácii hodnoty  $c_p$  posúvaním bodu D v horizontálnom a vertikálnom smere. V tejto úlohe bolo ukončovacie kritérium rovnaké ako pri testovaní správnosti fungovania optimalizačných metód, ale tolerancia bola nastavená na Matla-bovske „eps“ (tj. tj.  $2,2204 \cdot 10^{-16}$ ). Táto tolerancia je pre technickú prax zbytočne presná a často je postačujúca hodnota tolerancie okolo  $1 \cdot 10^{-4}$ .

### 8.3.1. Nelder-Mead

Využitím metódy Nelder-Mead sme dosiahli hodnotu  $c_p = \mathbf{0,807863}$  po 75 iteráciach. V posledných iteráciach metódy Nelder-Mead dochádza k redukovaniu simplexu okolo nášho extrém. Využitím aritmetického priemeru teda dokážeme vypočítať dostatočne presnú pozíciu lokálneho maxima funkcie. Týmto sme dosiahli bod

$$\mathbf{D} = [68, 6020; 197, 3913].$$

Optimalizovaná geometria sacej trúby je znázornená na obrázku 8.6. Túto geometriu sme dosiahli pri voľbe počiatočného simplexu okolo vrcholu D z obrázku 8.2.

Okrem toho sme uskutočnili ďalšie štyri optimalizačné slučky s rôznymi počiatočnými simplexami. Za zmienku stojí fakt, že všetky finálne hodnoty  $c_p$  ležali v uzavretom intervale  $\langle 0,765948; 0,787277 \rangle$ . Počet iterácií bol v jednotlivých prípadoch od 36 do 42.

### 8.3.2. BFGS-M

V prípade využitia nami modifikovanej metódy BFGS-M sme dosiahli veľmi hodnotu  $c_p = \mathbf{0,806626}$  v bode

$$\mathbf{D} = [98, 6374; 197, 8398].$$

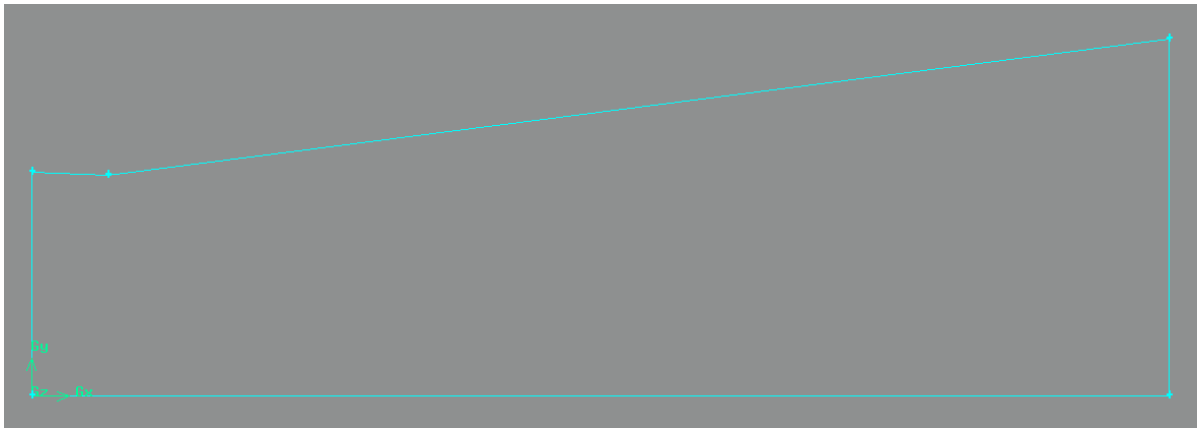
## 8. APLIKÁCIA METÓD NELDER-MEAD A BFGS PRI TVAROVEJ OPTIMALIZÁCI

Počiatočný bod mal súradnice  $[520; 250]$  a aj keď počet iterácií potrebných k nájdeniu extrému bolo len 12, slučka tvarovej optimalizácie, a teda prepočítavanie hodnoty  $c_p$ , prebehla 73-krát. Dôvodom bolo prepočítavanie a stavba novej geometrie po každom skrátení dĺžky kroku  $\alpha$  v Armijovej podmienke.

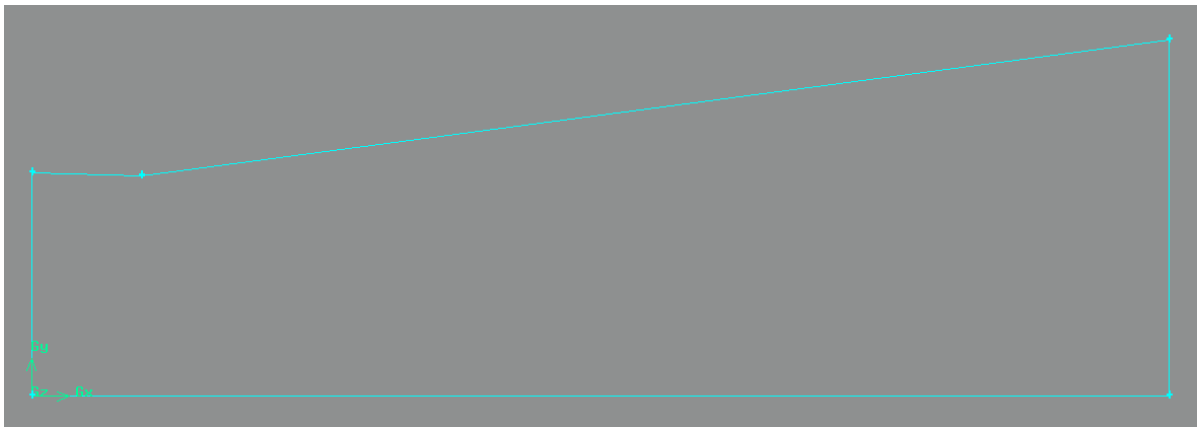
Preto je u metódy BFGS často využívaný paralelný výpočet na viacerých výpočtových jednotkách, ktorý celý proces dokáže urýchliť. Schému takejto modifikácie je možné postrehnúť v dizertačnej práci [5].

### 8.3.3. Zhrnutie

Metóda Nelder-Mead v prípade zmeny dvoch parametrov (x-ová a y-ová pozícia bodu D) dosiahla lepšej hodnoty kritériálnej funkcie. V porovnaní s BFGS-M avšak nedochádza k markantnému rozdielu. Geometrie oboch optimalizovaných difúzorov majú podobný tvar, čo je možné si porovnať na nasledujúcich obrázkoch:

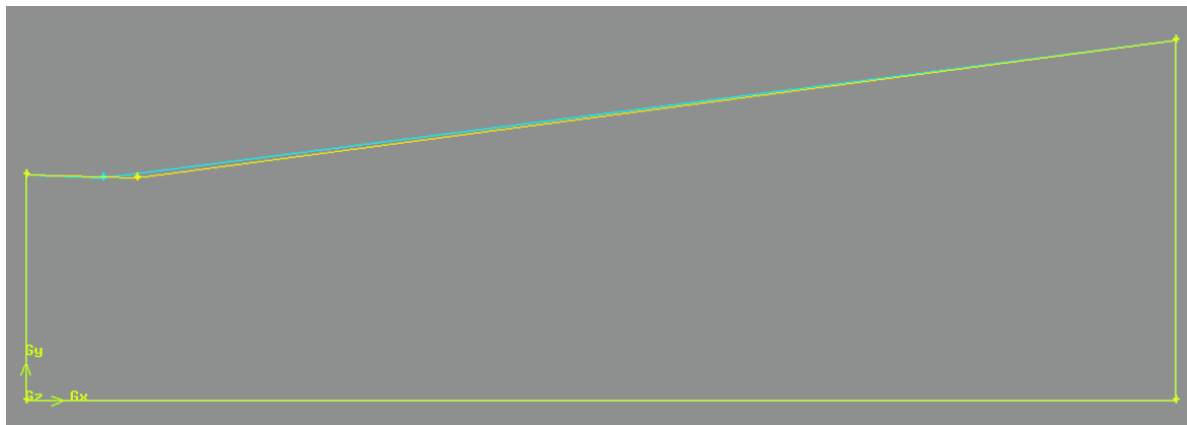


Obrázok 8.4: Finálny tvar po častiach lineárnej sacej trúby (Nelder-Mead)



Obrázok 8.5: Finálny tvar po častiach lineárnej sacej trúby (BFGS)

### 8.3. TVAROVÁ OPTIMALIZÁCIA PO ČASTIACH LINEÁRNEHO DIFÚZORU

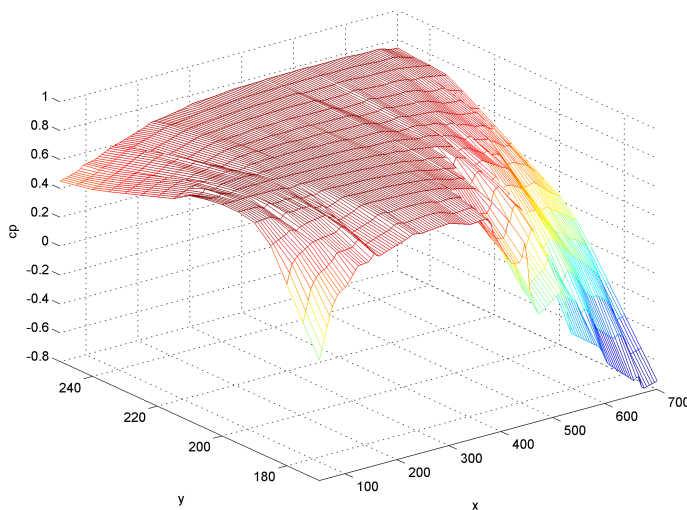


Obrázok 8.6: Porovnanie finálneho tvaru (svetlo-modrá: Nelder-Mead, žltá: BFGS-M)

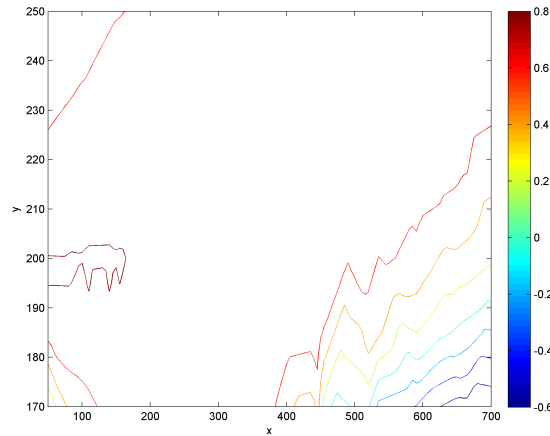
Metódy dosiahli maximum hodnoty  $c_p$  pri rôznych počiatočných bodoch. Pre porovnanie sme na záver využili počiatočný bod metódy BFGS-M, pri ktorom sme dostali maximálnu hodnotu koeficientu tlakovej regenerácie a vytvorili sme z neho pravidelný simplex pre metódu Nelder-Mead. Po 51 iteráciach došlo k splneniu ukončovacieho kritéria v bode  $[68,650; 197,347]$  s hodnotou  $c_p = 0,807428$ . Nelder-Mead teda pri rovnakom iníciaľnom bode dosiahol lepší výsledok kritériálnej funkcie a zároveň k tomu potreboval kratší výpočtový čas.

V druhom prípade sme využili počiatočný simplex metódy Nelder-Mead, u ktorého sme dosiahli najvyššej hodnoty  $c_p$ . Metóda BFGS-M s týmto počiatočným bodom dosiahla hodnoty lokálneho maxima  $c_p = 0,771678$  v bode  $[791,687; 277,162]$  po 52 iteráciach. Metóda Nelder-Mead sa znovu ukázala ako úspešnejšou metódou.

O správnosti nájdeného extrému sa môžeme presvedčiť na obrázku 8.7. Graf je tvorený 411 bodmi a tvar teda neodpovedá realite. Pre lepšiu predstavu by bolo potrebné počet bodov minimálne zdvojnásobiť. Hodnota extrému je viac viditeľná pri vytvorení vrstevníc znázornených na obrázku 8.8.



Obrázok 8.7: Približný tvar hodnôt  $c_p$  pri po častiach lineárnom difúzore



Obrázok 8.8: Vrstevnice tvorené hodnotami  $c_p$  pri po častiach lineárnom difúzore

## 8.4. Tvarová optimalizácia s využitím Bézierových kriviek 1. stupňa

Zaujímavým poznatkom by mohlo byť porovnanie dosiahnutej maximálnej hodnoty kritériálnej funkcie s využitím Bézierových kriviek 1. stupňa (tj. len jeden bod riadiaceho polygónu) s tvarou optimalizáciou po častiach lineárneho difúzora riešeného v sekcii 8.3. Obidva prípady majú spoločné to, že v procese optimalizácie dochádza k posuvu jedného bodu v horizontálnom alebo vertikálnom smere.

### 8.4.1. Nelder-Mead

Využitím metódy Nelder-Mead sme dosiahli hodnotu  $c_p = \mathbf{0.810309}$ . Zaokrúhlením hodnôt simplexu na tri desatinné miesta sme získali súradnice bodu riadiaceho polygónu

$$\mathbf{P}_1 = [138.172; 185, 848].$$

Počet iterácií potrebných s splneniu ukončovacieho kritéria s toleranciou  $\epsilon = 0,00001$  bol 52. Metóda dosahovala lepších výsledkov v prípade, ak sme zmenšili dĺžku pravidelného simplexu na  $a=0,05$ .

### 8.4.2. BFGS

Viditeľne menší počet iterácií bol potrebný v prípade riešenia úlohy pomocou metódy BFGS-M. Hodnotu  $c_p = \mathbf{0,809363}$  sme dosiahli už po 9 iteráciach, pričom bod riadiaceho polygónu mal súradnice

$$\mathbf{P}_1 = [189, 937; 183, 372].$$

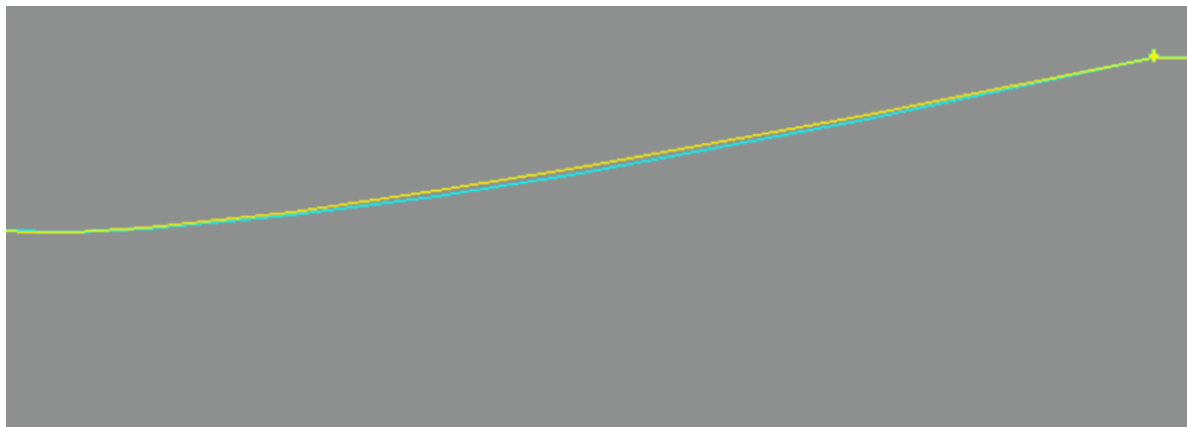
Počiatočný simplex bol volený v bode  $[300; 300]$ .

### 8.4.3. Zhrnutie

Aj v tomto prípade dosiahla metóda Nelder-Mead lepšiu hodnotu kritériálnej funkcie, avšak tentokrát bola časovo výrazne náročnejšou metódou. Hoci pre obe metódy vyšla

## 8.5. TVAROVÁ OPTIMALIZÁCIA S VYUŽITÍM KUBICKÝCH BÉZIEROVÝCH KRIVIEK

poloha bodu riadiaceho polygónu odlišne (najmä v prípade osi  $x$ ) je generovaná krivka takmer zhodná, čo je znázornené na obrázku 8.9.



Obrázok 8.9: Priblížený pohľad na parametrizovanú krivku (svetlo-modrá: Nelder-Mead, žltá: BFGS-M)

Pri porovnaní prvých dvoch úloh zisťujeme, že pomocou parametrizácie prostredníctvom Bézierovej krivky 1. stupňa sme schopní získať vyššiu hodnotu kritériálnej funkcie. Rozdiel je však znovu zanedbateľný, keď rozdiel maximálnych finálnych hodnôt  $c_p$  pri metóde Nelder-Mead je rovný v celku zanedbateľnej hodnote 0,002446. Pri metóde BFGS je tento rozdiel ešte menší a to 0,001923.

## 8.5. Tvarová optimalizácia s využitím kubických Bézierových kriviek

Pri využívaní kubických Bézierových kriviek kritériálna funkcia  $c_p$  závisí na štyroch parametroch. Sú nimi posun v ose  $x$  a v ose  $y$  dvoch vrcholov riadiaceho polygónu kubickej Bézierovej krivky.

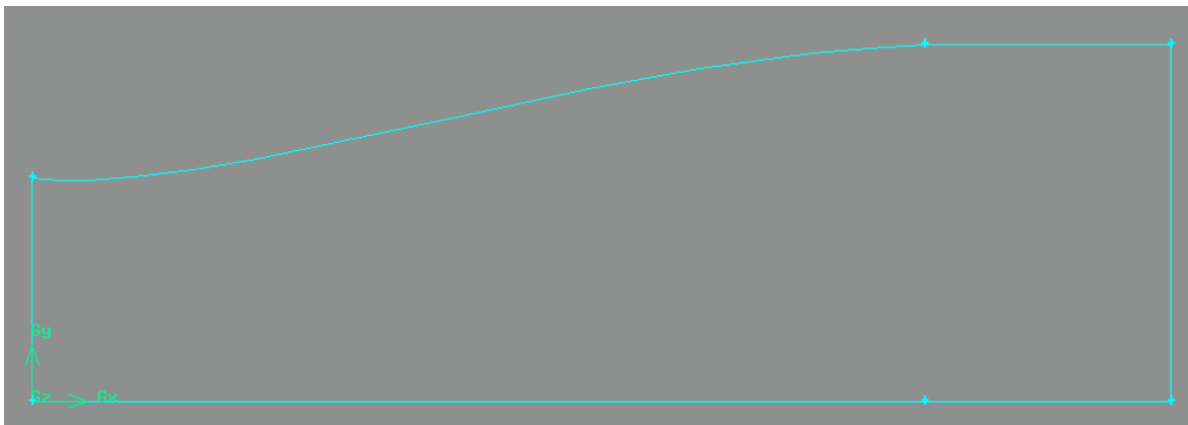
Z dôvodu lineárneho spájania jednotlivých bodov difúzora v prvej úlohe bolo postačujúce ukladať len zmeny v posúvajúcim sa bode. V tejto úlohe to nie je dostatočné a treba do pamäti zaznamenávať aj jednotlivé body Bézierovej krivky. Tento krok je potrebný pre tvorbu geometrie v prostredí Gambit.

### 8.5.1. Nelder-Mead

Využitie kubických Bézierových kriviek viedlo k miernému zlepšeniu dosiahnutého výsledku z prvej úlohy. Hodnota  $c_p = 0,812146$  bola dosiahnutá po 118 iteráciách. Dosiahnuté súradnice bodov riadiaceho polygónu Bézierovej krivky sú

$$\mathbf{P}_1 = [172, 5671; 181, 4290] \quad \mathbf{P}_2 = [513, 7642; 312, 5816].$$

Jedným z bodov počiatočného pravidelného simplexu bol bod  $\mathbf{x}_1 = [0, 3; 0, 1; 0, 4; 0, 8]$ , pričom jednotlivé hodnoty simplexu predstavovali  $[P_{1X}; P_{1Y}; P_{2X}; P_{2Y}]$ .



Obrázok 8.10: Tvar difúzora pri parametrizovaní kubickou Bézierovou krivkou

### 8.5.2. BFGS-M

Metóda BFGS-M mala s touto úlohou značné problémy. Síce dosiahla maximálnu hodnotu  $c_p$  značne podobnú v porovnaní s metódou Nelder-Mead, ale to len v prípade voľby počiatočného bodu v okolí už známeho získaného extrému pomocou metódy Nelder-Mead.

V obecnom prípade, dosahovala metóda v prvých iteráciách značné zlepšenie hodnoty kriteriálnej funkcie. Následne však došlo k stagnácii a hodnoty  $c_p$  sa pomaly ustalovali s tým, ako hodnota gradientu sa blížila nulovému vektoru. Dosiahnuté hodnoty koeficientu tlakovej regenerácie po splnení ukončovacieho kritéria mali hodnotu okolo 0,75.

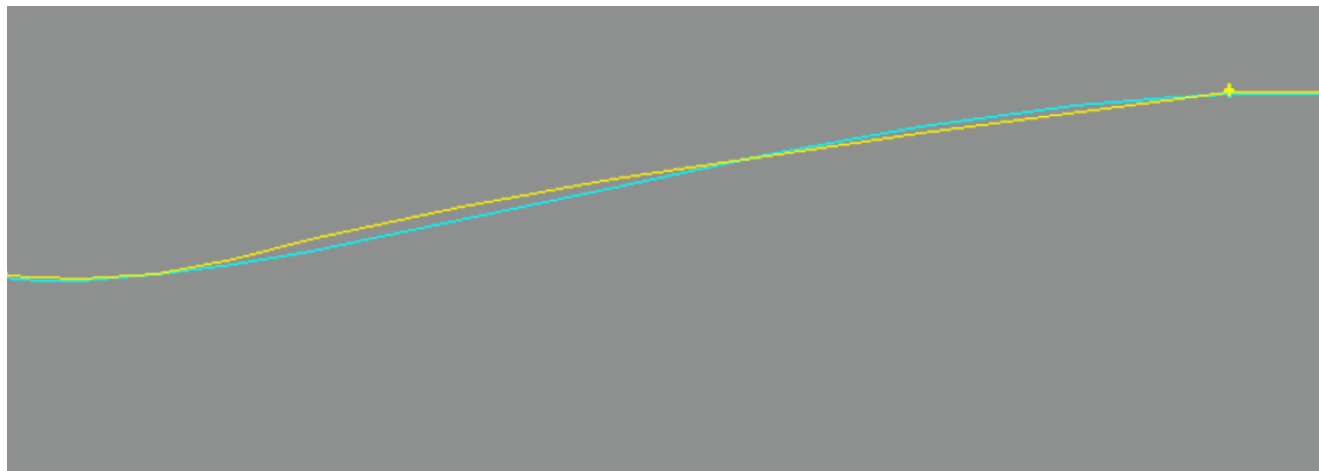
## 8.6. Tvarová optimalizácia s využitím Bézierových kriviek 3. stupňa

Z vedeckej zvedavosti bola vykonaná aj tvarová optimalizácia prostredníctvom Bézierových kriviek 3. stupňa. Výpočet bol uskutočnený len metódou Nelder-Mead, ktorá sa zdá byť z doposiaľ dosiahnutých výsledkov úspešnejšou metódou. Po 78 iteráciách bola dosiahnutá hodnota  $c_p = 0,813076$  po splnení ukončovacieho kritéria s hodnotou tolerance 0,001. Súradnice troch bodov riadiaceho polgónu sú

$$\mathbf{P}_1 = [128, 563; 237, 429] \quad \mathbf{P}_2 = [186, 375; 186, 554] \quad \mathbf{P}_3 = [427, 714; 270, 078].$$

Zložky simplexu reprezentujú súradnice bodov riadiaceho polygónu Bézierovej krivky 3. stupňa (tj.  $[P_{1X}; P_{1Y}; P_{2X}; P_{2Y}; P_{3X}; P_{3Y}]$ ). Oproti Bézierovej krivke 2. stupňa dosiahla metóda vyššiu hodnotu o takmer jednu tisícinu. Značný rozdiel medzi nimi nie je ani v ich geometrii, čo je možné postrehnúť na obrázku 8.11.

## 8.6. TVAROVÁ OPTIMALIZÁCIA S VYUŽITÍM BÉZIEROVÝCH KRIVIEK 3. STUPŇA



Obrázok 8.11: Priblížený pohľad na finálny tvar Béziových kriviek(svetlo-modrá: 2. stupeň krivky, žltá: 3. stupeň krivky)



## 9. Záver

Cieľom bakalárskej práce bolo vykonanie tvarovej optimalizácie koncového difúzoru vodnej turbíny, pri maximalizácii koeficientu tlakovej regenerácie prostredníctvom naprogramovanej Nelder-Meadovej metódy a metódy BFGS-M (nami zvolené označenie pre metódu BFGS v prípade, keď nepoznáme presnú hodnotu gradientu).

Nárast hodnoty koeficientu tlakovej regenerácie bol sledovaný na štyroch aplikačných úlohách. V prvej úlohe bol sledovaný a porovnávaný priebeh pri tvarovej optimalizácii po častiach lineárne spojitého difúzoru a v ďalších troch prípadoch dochádzalo k parametrizácii povrchu difúzoru pomocou Bézierových kriviek rôznych stupňov.

Naša optimalizovaná hodnota  $c_p$  dosiahla pri parametrizácii Bézierovou krivkou 3. stupňa vyššiu hodnotu o 0,076252 v porovnaní s iniciálnym tvarom. Najväčší nárast nastal pri prvej úlohe a to až o 0,071039. Využitím parametrizácie pomocou Bézierovej krivky 3. stupňa sme teda docielili malého zlepšenia ale aj na úkor výpočtového času.

Obece si počínala lepšie metóda Nelder-Mead, ktorá vždy dosiahla vyššej hodnoty sledovanej kritériálnej funkcie, avšak v porovnaní s metódou BFGS-M dochádzalo k minimálnym rozdielom.

K značnému rozdielu došlo pri parametrizácii povrchu koncového difúzora vírovej turbíny pomocou Bézierovej krivky 2. stupňa, kedy metóda BFGS-M až na špecifické výnimky nebola schopná dosiahnuť hodnotu podobnú výsledku u metódy Nelder-Mead. Faktorom ovplyvňujúcim slabšiu úspešnosť metódy BFGS-M je aj numerický výpočet parciálnych derivácií pri výpočte gradientu. Úspešnosť metódy by sa dala zvýšiť využitím silnejších Wolfeho podmienok namiesto Armijovej podmienky.

Až na tento prípad fungovala metóda BFGS-M veľmi slušne, pričom zároveň dosahovala menšieho resp. podobného výpočtového času v porovnaní s metódou Nelder-Mead. V tomto kroku by bolo možné využiť vlastnosť dobrého paralelného programovania metódy BFGS, čo by viedlo k značnému uštrieni výpočtového času.

# Literatura

- [1] MACHALOVÁ, Jitka a Horymír NETUKA. *Numerické metody nepodmíněné optimalizace*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013, 142 s. ISBN 978-80-244-3403-2.
- [2] ANDRÁŠIK, R. *Newtonova metoda pro úlohu nepodmíněné optimalizace*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, 2010. 90s. Vedoucí RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.
- [3] MACHÁT, P. *Vodní turbíny a jejich využití*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008. 32s. Vedoucí Ing. Daniel Himr
- [4] HALUZA, M., F. POCHYLÝ a P. RUDOLF. *The swirl turbine*. In: IOP Conference Series: Earth and Environmental Science [online]. 2012-11-26, s. 042034- [cit. 2015-04-30]. ISSN 1755-1307. DOI: 10.1088/1755-1315/15/4/042034. Dostupné z: <http://stacks.iop.org/1755-1315/15/i=4/a=042034?key=crossref.d0468fdf19a6c08410a1c2ba29156d93>
- [5] SVOZIL, J.: *Optimalizace potrubních tvarovek*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010 107s. Vedoucí práce Prof. Ing. František Pochylý, Csc.
- [6] RUDOLF, P.: *Studie smykových vrstev k optimalizaci sací trouby vírové turbíny*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2004 306s. Vedoucí Doc. Ing. Jaroslav Štigler, Ph.D.
- [7] ŠTEFAN, D. *Struktura proudění a energetické přeměny v kolenové sací troubě*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 76s. Vedoucí doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.
- [8] KILIAN, O. *Vestavby v savce vírové turbíny*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 80s. Vedoucí doc. Ing. Miloslav Haluza, CSc.
- [9] NECHLEBA, Miroslav. 1962. *Vodní turbíny, jejich konstrukce a příslušenství*. 2. vyd. Praha: SNTL
- [10] ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. *Numerické metody*. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008, 110 s. ISBN 978-80-214-3752-4.
- [11] RAO, S. *Engineering optimization: theory and practice*. 4th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley, c2009, xix, 813p. ISBN 978-0-470-18352-6.
- [12] MENG, Z. and PAN, J.-S.: *A simple and accurate global optimizer for continuous spaces optimization*. In *Genetic and Evolutionary Computing*. Proceeding of the Eighth International Conference on Genetic and Evolutionary Computing, Nanchang, China, 2014. Switzerland: Springer, 2015, p. 121-131. ISBN 978-3-319-12286-1.
- [13] SWANN, W. H., *Direct search methods*, in *Numerical Methods for Unconstrained Optimization*, W. Murray, ed., Academic Press, London, New York, 1972, p.13-28.

- [14] LEWIS, Robert Michael, Virginia TORCZON a Michael W. TROSSET. 2000. *Direct search methods: then and now*. Journal of Computational and Applied Mathematics [online]. 124(1-2): 191-207 [cit. 2015-05-08]. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00423-4. ISSN 03770427. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377042700004234>
- [15] KLAPKA, Jindřich a Jiří DVOŘÁK. *Metody operačního výzkumu*. Vyd. 1. Brno: Vysoké učení technické, 1996, iii, 154 s. ISBN 80-214-0817-0.
- [16] NELDER, J. A. a R. MEAD. 1965. *A Simplex Method for Function Minimization*. The Computer Journal. 7(4): 308-313. DOI: 10.1093/comjnl/7.4.308. ISSN 0010-4620. Dostupné také z: <http://comjnl.oxfordjournals.org/cgi/doi/10.1093/comjnl/7.4.308>
- [17] SPENDLEY, W., G. R. HEXT a F. R. HIMSWORTH. 1962. *Sequential Application of Simplex Designs in Optimisation and Evolutionary Operation*. Technometrics. 4(4): 441-461. DOI: 10.1080/00401706.1962.10490033. ISSN 0040-1706. Dostupné také z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1962.10490033>
- [18] GOULD, N. In: *MSc course on nonlinear optimization: Part 2: Linesearch methods for unconstrained optimization* [online]. [cit. 2015-05-09]. Dostupné z: <http://www.numerical.rl.ac.uk/people/nimg/msc/lectures/uepart2.2.pdf>

# Zoznam použitých skratiek a symbolov

$\mathbb{R}$	obor reálnych čísel
$\mathbb{R}^n$	vektorový priestor dimenzie $n$ nad $\mathbb{R}$
$\ \cdot\ $	euklidovská norma vektoru
$f \in C^k$	existencia všetkých derivácií funkcie $f$ až do rádu $k$ a ich spojitost
$\nabla f(\mathbf{x})$	gradient funkcie $f$ v bode $\mathbf{x}$
$\mathbf{H}(\mathbf{x})$	Hessián funkcie $f$ v bode $\mathbf{x}$
$\{\mathbf{x}_k\}$	postupnosť vektorov
$\mathbf{I}$	jednotková matica
$E_k$	Merná kinetická energia [J.kg <sup>-1</sup> ]
$\alpha$	Coriolisove číslo [1]
$v$	absolutná rýchlosť [m.s <sup>-1</sup> ]
$p$	statický tlak [Pa]
$\rho$	hustota [kg.m <sup>-1</sup> ]
$g$	tiažové zrýchlenie [m.s <sup>-1</sup> ]
$H_s$	sacia výška [m]
$Y_z$	stratová merná energia [J.kg <sup>-1</sup> ]
$c_p$	koeficient tlakovej regenerácie [1]
$\eta$	účinnosť [1]

## Zoznam príloh

- A      Zdrojový kód v Matlabe
- B      Journaly z Fluentu a Gambitu

# A. Zdrojový kód v Matlabe

Zdrojové kódy sú uložené v priečinku *Matlab* na priloženom CD

Priečinok *Matlab* obsahuje v sebe dve zložky, z ktorých každý obsahuje štyri súbory:

## BFGS

1. BFGS\_bezier.m (Optimalizácia difúzoru parametrizovaného Bézierovou krivkou metódou BFGS)
2. BFGS\_bezier\_volanie.m (Volaná funkcia v metóde BFGS\_bezier.m)
3. BFGS\_linear.m (Optimalizácia po častiach lineárneho difúzoru metódou BFGS)
4. BFGS\_linear\_volanie.m (Volaná funkcia v metóde BFGS\_linear.m)

## Nelder-Mead

Analogicky u metódy Nelder-Mead

1. NM\_bezier.m
2. NM\_bezier\_volanie.m
3. NM\_linear.m
4. NM\_linear\_volanie.m

## B. Journaly z Fluentu a Gambitu

Priečinok *Journals* obsahuje v sebe datové dokumenty potrebné k spusteniu metód naprogramovaných v prostredí Matlab. Priečinok obsahuje 4 súbory

1. Fjournal\_bez.jou (Fluentový journal pri Bezierových krivkách)
2. Fjournal\_lin.jou (Fluentový journal pri po častiach linárnom difúzore)
3. Gjournal\_bez.jou (Gambitový journal pri Bezierových krivkách)
4. Gjournal\_lin.jou (Gambitový journal pri po častiach linárnom difúzore)